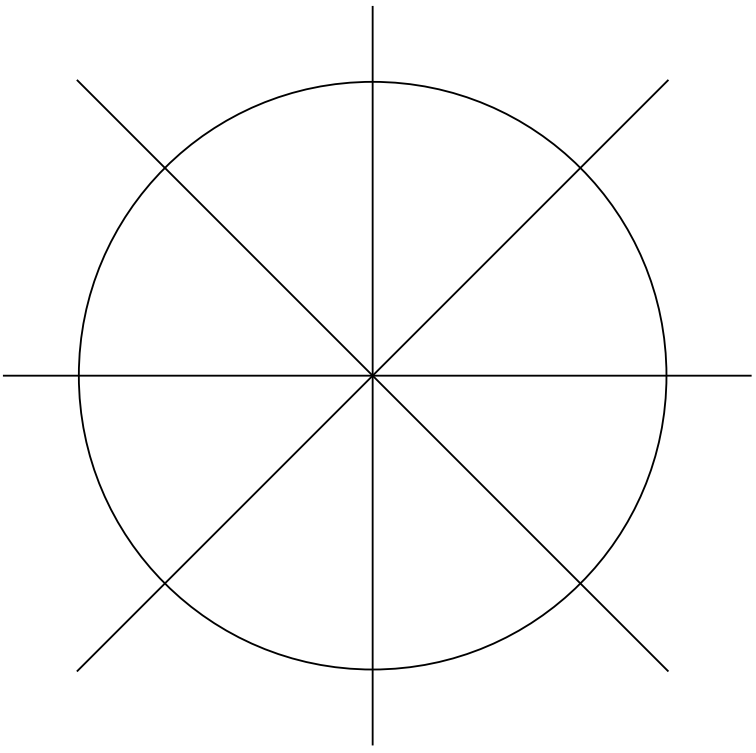
Cercle discret ?

Cercle Euclidien $\rightsquigarrow$ Cercles discrets ?.

Soient C un point du plan Euclidien $\mathbb{R}^2$ et R un nombre réel positif. Le cerle $\mathcal{C}(C, R)$ de centre $C = (x_C, y_C)$ et de rayon R est l'ensemble des points :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2\}.$$

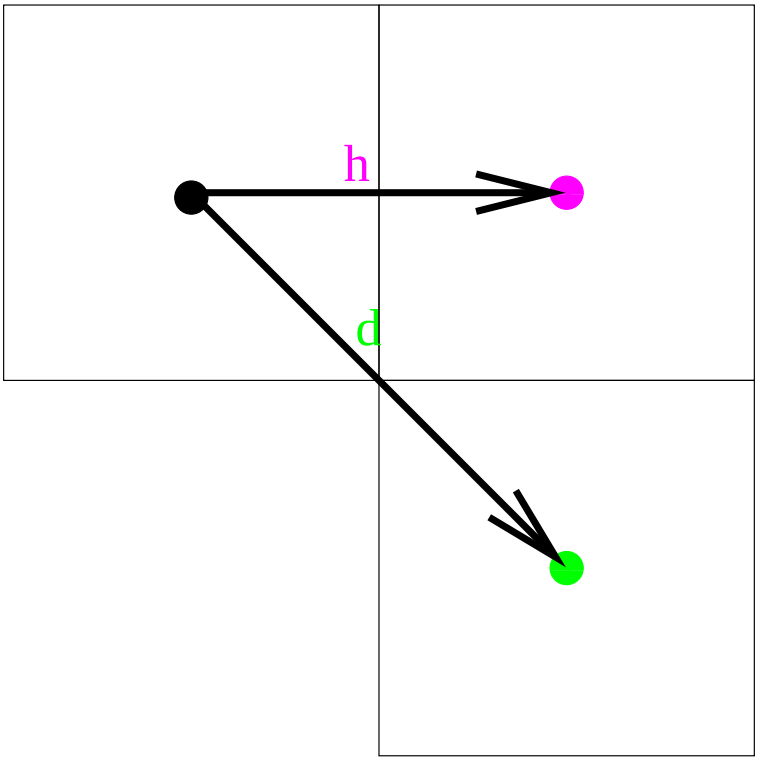


Cercle de Bresenheim

Parcourt du cercle de Bresenham

Point initial $\rightsquigarrow (x_0, y_0) = (0, R)$.

$$(x_{i+1}, y_{i+1}) = \begin{cases} (x_i + 1, y_i) & \text{(i.e. Déplacement horizental (h))} \\ (x_i + 1, y_i - 1) & \text{(i.e. Déplacement diagonal (d))} \end{cases} \quad \text{ou}$$



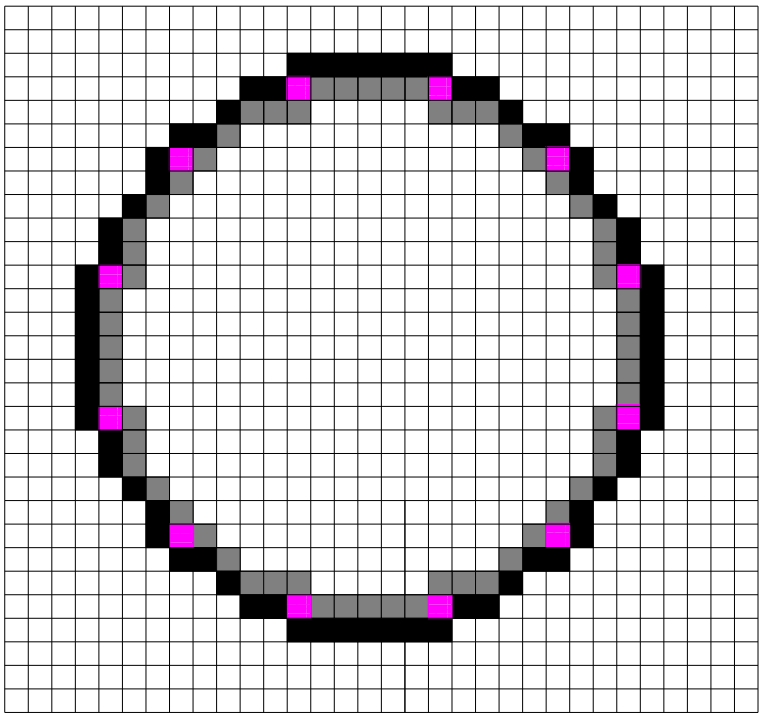
Jusqu'à ce que $x_i = y_i$

Cercle de Bresenheim

Soit $M = (x_M, y_M)$ est un point du plan Euclidien $\mathbb{R}^2$. Alors,

$$d(M, \mathcal{C}(C, R)) = |d_2(M, C) - R| = |\sqrt{(x_C - x_M)^2 - (y_C - y_M)^2} - R|$$

Parcourt du cercle de Bresenham



Les points "entre" les cercles de Bresenham de rayon R et $R + 1$:

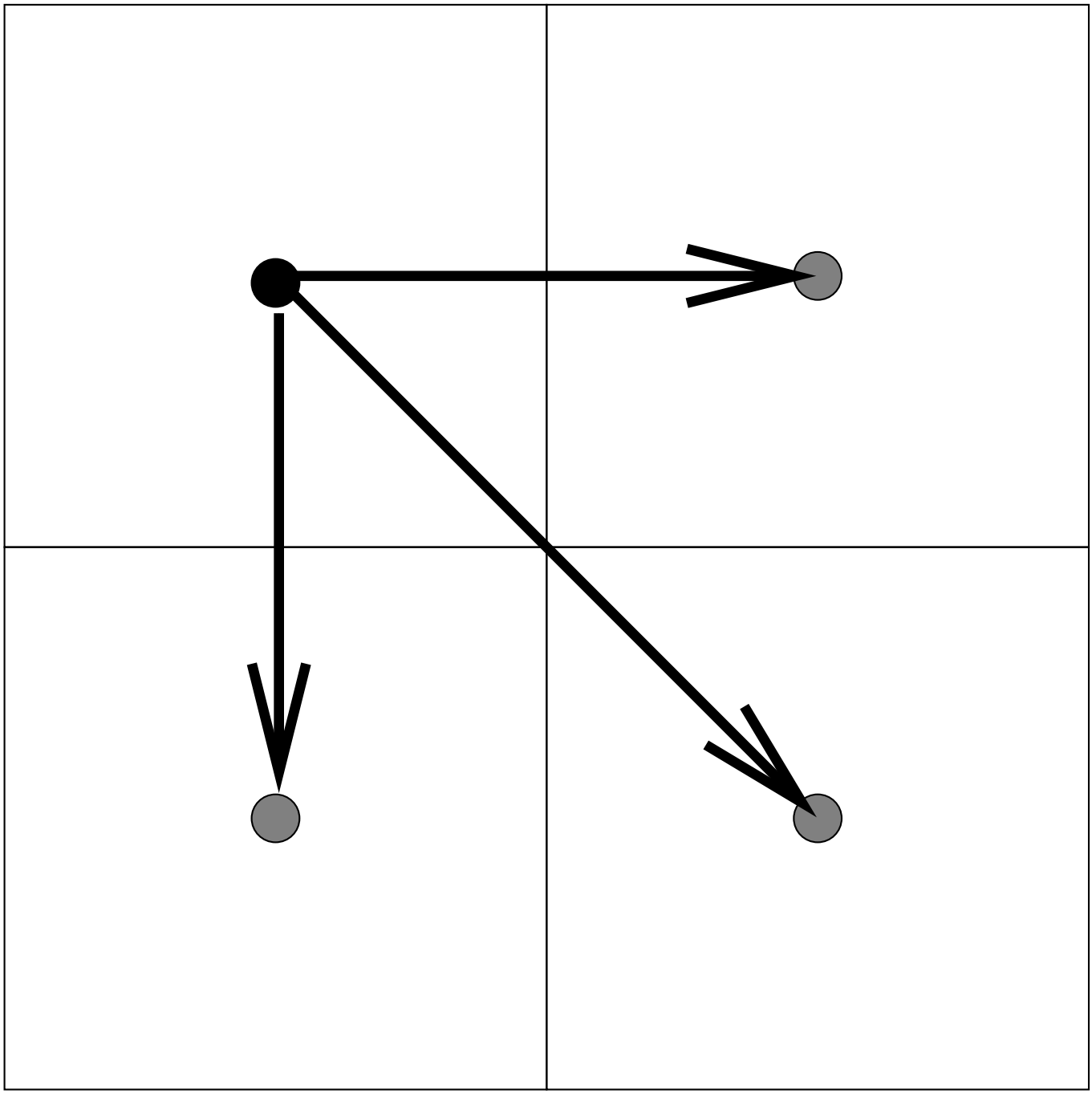
$$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x = \lfloor \sqrt{R^2 - y^2} - \frac{1}{2} \rfloor\}.$$

Cercle naïf et cercle arithmétique

Soient C un point de $\mathbb{Z}^2$ et R un entier positif :

$$\mathcal{C}N(C,R) = \{(M \in \mathbb{Z}^2 | R^2 \leq d_2(M,C)^2 < (R+1)^2\}.$$

$$\mathcal{C}A(C,R) = \{M \in \mathbb{Z}^2 | (R-\frac{1}{2})^2 \leq d_2(M,C)^2 < (R+\frac{1}{2})^2\}.$$



Caractérisation des points des cercles naïfs et arithémtiques

Centre du cercle discret $\rightsquigarrow$ $(0,0)$

Caractérier les points d'un cercle discret (naïf ou arithmétique) $\rightsquigarrow$ Résoudre des équations diophantiennes de type : $\rightsquigarrow$

$$x^2 + y^2 = n.$$

pour n un entier donné.

- Cercle naïf de rayon $R \in \mathbb{N} \rightsquigarrow$ $R^2 \leq n \leq R^2 + 2R$.
- Cercle arithmétique de rayon $R \in \mathbb{N} \rightsquigarrow$ $\lceil (R - \frac{1}{2})^2 \rceil \leq n \leq \lfloor (R + \frac{1}{2})^2 \rfloor$.

Définitions

- Un nombre premier est dit blanc s'il est de la forme $4 * k + 1$ pour $k \in \mathbb{N}$.

  Exemples : 5, 13, 17, 29, ...

- Un nombre premier est noir s'il est de la forme $4 * k + 3$ pour $k \in \mathbb{N}$.

  Exemples : 3, 7, 11, 19, ...

- Le nombre 2 est dit neutre.

  $\longrightarrow$ Tout nombre premier est soit noir, soit blanc soit neutre.

Propriétés

(Euler (1754), Legende(1808), Heath-Brown (1983), Varoucas (1986))

• Le produit de deux sommes de deux carrés est une somme de carré :

$(a^2+b^2)*(c^2+d^2) = (a*c+b*d)^2+(a*d-b*c)^2$.
$= (a*c-b*d)^2+(a*d+b*c)^2$.

• Un nombre premier est somme de deux carrés ssi il est blanc ou neutre.

• Soit M un nombre entier tel que $M = 2^{2k+\epsilon}*B*N$ avec $\epsilon \in \{0,1\}$, B est un produit de nombres premiers blancs et N est un produit de nombres premiers noirs.

– Si N n'est pas un carré alors M n'est pas une somme de deux carrés.

– Si N est un carré alors le nombre de représentations de M comme somme de deux carrés est $4*\tau(B)$ où $\tau(B)$ est le nombre de diviseurs de B.

Exemple : $\tau(12) = 6$.

L'algorithme de Legende (1808)

Soit p un nombre premier blanc.

$a_0 = \lfloor \sqrt{p} \rfloor$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 1$.

Pour $n \geq 1$:

$b_{n+1} = a_n * c_n - b_n$,

$c_{n+1} = \lfloor \frac{p - b_{n+1}^2}{c_n} \rfloor$,

$a_{n+1} = \lfloor \frac{a_0 + b_{n+1}}{c_{n+1}} \rfloor$.

Alors il existe nécéssairement un entier n tel que

$$c_n = c_{n+1}$$

et dans ce cas on a :

$$p = b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2.$$

L'algorithme de Heath-Brown-Varoucas (1986)

Soit p un nombre premier blanc tel que $p = 4 * k + 1$.

On part du triplet $(k, 1, 1)$.

Avec un triplet (x, y, z) on fait l'opération suivante :

On le transorme en

- $(x - y - z, y, 2y + z)$ si $x > y + z$,

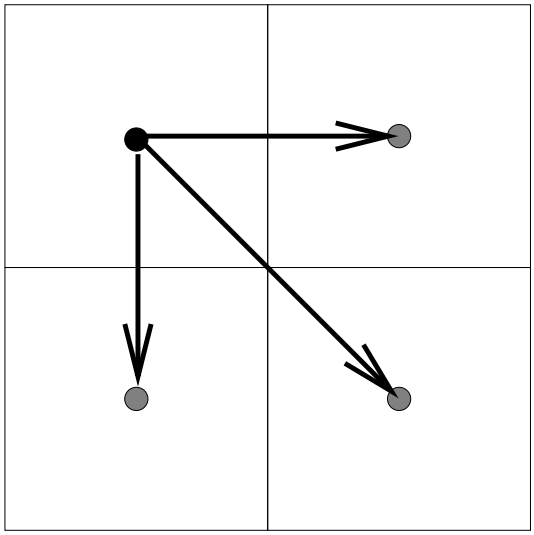
- $(-x + y + z, x, 2x - z)$ si $x < y + z$.

On s'arrête lorsque $x = y$.

$\longrightarrow$ À toute les étapes le triplet (x, y, z) vérifie la relation

$$p = 4 * x * y + z^2$$

Parcourt du cercle de Bresenham



Propriétés :

Soient $\mathcal{C}N(C,R))$ un cercle naïf de centre C et de rayon R et $(x,y) \in \mathcal{C}N(C,R))$.

- Les déplacements h et v sont incompatibles *(i.e. Les points* $(x+1,y)$ *et* $(x,y-1)$ *ne peuvent pas être simultanément dans* $\mathcal{C}N(C,R))$*)*.

- Si les déplacements h et v ne sont pas possibles, alors le déplacement d est obligatoire *(i.e. si les points* $(x+1,y),(x,y-1)$ *ne sont pas dans* $\mathcal{C}N(C,R))$*, alors le point* $(x+1,y-1)$ *est obligatoirement dans* $\mathcal{C}N(C,R))$*)*.

- Les points $(x-1,y-1)$ et $(x+1,y+1)$ ne sont pas $\mathcal{C}N(C,R))$

Rotations discrètes ?

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Discrétisation de la rotation $R_\alpha \rightsquigarrow$ critères ?

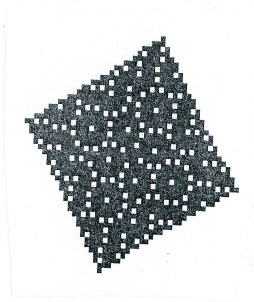
- Bijectivité, surjectivité : Conservation des informations.
- Conservation des distances.
- Conservation de la connexité.
- Commutativité.
- Concervation de certains objets géométriques (droites, cercles, etc.).

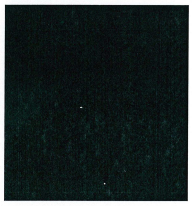
Trancature d'un rotation Euclidiuenne

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_\alpha^{tran} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lfloor R_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rfloor.$$

$\rightsquigarrow$ On associe au pixel (x', y') les caractéristiques du pixel (x, y).

$\Rightarrow$ R_α^{tran} n'est généralement pas bijective et elle ne conserve pas les distances.





Théorème :

R_α^{tran} est bijective si et seulement si pour un $k \in \mathbb{N}^\star$ on a :

$$\{\cos(\alpha), \sin(\alpha)\} = \{\frac{2k+1}{2k^2+2k+1}, \frac{2k^2+2k}{2k^2+2k+1}\}.$$

Autrement dit $\cos(\alpha), \sin(\alpha)$ sont des nombres rationnels.

On dit dans ce cas que l'angle α est pythagoricien.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_\alpha^{Inv-tran} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \lfloor R_\alpha \begin{pmatrix} x' + \frac{1}{2} \\ y' + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rfloor.$$

$\rightsquigarrow$ On calcule (x, y) à partir de (x', y') et on associe au pixel (x', y') les caractéristiques du pixel (x, y).

$\Rightarrow$ $R_\alpha^{Inv-tran}$ est surjective et "conserve" les distances mieu que R_α^{tran}.

Rotation par cercle naïf

Rotation d'angle α.

- Pour chaque entier positif R on considèle le cerle naïf de centre $(0,0)$ et de rayon R.
  $\Rightarrow$ le sens de la rotation va dépendre du signe de α.
- On calcule le nombre N de pointsdu cercle discret et l'angle α va donc correspondre à l'entier

$$R_k(\alpha) = \lfloor \frac{|\alpha| * N}{2\pi} \rfloor.$$

- On 'décale' tous les points du cercle de $R_k(\alpha)$ points dans le sens de la rotation.

