Objectifs

- Recherche d'algorithmes efficaces pour la reconnaissance de morceaux de droites, de plans et plus généralement d'hperplans discrets.

- Étude du rôle de la topologie dans le problème de la reconnaissance.

Hyperplan discret

Définition :

Soient $a_1, ..., a_d,\ \phi \in \mathbb{Z}$ et $\omega \in \mathbb{N}^\star$.

$HD(\vec{a}, \phi, \omega) = \{(x_1, ..., x_d) \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq a_1 * x_1 + ... + a_d * x_d + \phi < \omega\}$

est *l'hyperplan discret* de $\mathbb{Z}^d$ de *normale* $\vec{a} = (a_1, ..., a_d)$, de *phase* ϕ et d'*épaisseur* ω.

$\longrightarrow$ généralement ω est une fonction de $a_1, ..., a_d$.

- *Hyperplan naïf* $\rightarrow$ $\omega = Max(|a_1|, ..., |a_d|)$.
- *Hyperplan standard* $\rightarrow$ $\omega = |a_1| + ... + |a_d|$.

Problème de reconnaissance d'un morceau d'un hyperplan discret

Soit $S = \{\overrightarrow{p_1}, ..., \overrightarrow{p_k}\} \subset \mathbb{Z}^d$. Existe-t-il un hyperplan discret H tel que $S \subset H$?

$$\longrightarrow \quad ?\exists a_1, ..., a_d, \phi \in \mathbb{Z} \text{ tels que :}$$

$$\begin{cases} 0 \leq a_1 * p_{1,1} + ... + a_d * p_{1,d} + \phi < \omega \\ 0 \leq a_1 * p_{2,1} + ... + a_d * p_{2,d} + \phi < \omega \\ \qquad\qquad ... \\ 0 \leq a_1 * p_{k,1} + ... + a_d * p_{k,d} + \phi < \omega \end{cases}$$

où $\overrightarrow{p_i} = (p_{i,1}, ..., p_{i,d})$ pour $1 \leq i \leq k$.

Remarque : L'épaisseur ω dépend généralement de $a_1, ..., a_d, \phi$!

Système de contraintes linéaires sur un anneau de $\mathbb{R}$

?$\exists\, x_1, ..., x_n \in E \subseteq \mathbb{R}$ tels que :

$$(S_n) \quad \begin{cases} a_{1,1} * x_1 + ... + a_{1,n} * x_n \succ_1 b_1 \\ a_{2,1} * x_1 + ... + a_{2,n} * x_n \succ_2 b_2 \\ \qquad\qquad ... \\ a_{m,1} * x_1 + ... + a_{m,n} * x_n \succ_m b_m \end{cases}$$

où $a_{i,j}, b_i \in E$ et $\succ_i \in \{=, >, \geq\}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$.

$\longrightarrow$ (S_n) est un système de m contraintes linéaires sur n inconnues dans $E \subseteq \mathbb{R}$.

L'Algorithme d'Élimination de Fourier

S_n (n inconnues) $\longrightarrow$ S_{n-1} ($n-1$ inconnues)
S_n a une solution dans $\mathbb{R}^n$ $\iff$ S_{n-1} a une solution dans $\mathbb{R}^{n-1}$.

$\longrightarrow$ deux règles d'inférence (transformation) pour construire S_{n-1} à partir de S_n :

- Toutes les contraintes de S_n telles que $a_{i,n} = 0$ sont dans S_{n-1}.

$$a_{i,1}x_1 + ... + a_{i,n-1}x_n - 1 + \underline{0}x_n \succ_i b_i$$

- Pour tout couple de contraintes $1 \leq i, j \leq m$ tels que $a_{i,n} > 0$ et $a_{j,n} < 0$ on construit, comme indiquer ci-dessous, à partir de ces deux contraintes une nouvelle contrainte que l'on rajoute à S_{n-1} :

$$a_{i,1}x_1 + ... + a_{i,n-1}x_n - 1 + \underline{a_{i,n}}x_n \succ_i b_i$$

$$a_{j,1}x_1 + ... + a_{j,n-1}x_n - 1 + \underline{a_{j,n}}x_n \succ_j b_j$$

$$\downarrow$$

$$(a_{i,n} * a_{j,1} - a_{j,n} * a_{i,1})x_1 + ... + (a_{i,n} * a_{j,n-1} - a_{j,n} * a_{i,n-1})x_{n-1} \succ_{i,j} a_{i,n} * b_j - a_{j,n} * b_i$$

où

$$\succ_{i,j} = \begin{cases} \geq & \text{si } \succ_i = \succ_j = \geq \\ > & \text{sinon} \end{cases}$$

S_3 S_2

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & > & 0 \\ -x_1 + 2x_2 & > & 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 & \geq & 3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 & \leq & 5 \\ x_2 + 4x_3 & > & 7 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 & > & 0 \\ -x_1 + 2x_2 & > & 1 \\ 2x_1 + 4x_2 & \geq & 8 \\ 4x_1 + 13x_2 & > & 27 \end{cases}$$

$$S_n \xrightarrow{A.E.F} S_{n-1}$$

m contraintes $\longrightarrow$ $(\frac{m}{2})^2$ contraintes

Notations :
Soientt $S_n$un système de m contraintes linéaires sur n inconnues et $E \subseteq \mathbb{R}^n$

- $Sol(S_n)$: l'ensemble des solutions réelles de S_n.
- $Sol_{\mathbb{Z}}(S_n)$: l'ensemble des solutions entières de S_n.
- $P_{n-1}(E) = \{(e_1, ..., e_{n-1}) \mid (e_1, ..., e_{n-1}, e_n) \in E\}$
  (P_{n-1} est la projection sur les $n-1$ premières composantes).

Propriétés

Soit $S_n$un système de m contraintes linéaires sur n inconnues.

$$S_n \longrightarrow S_{n-1}$$

(i.e. Elimination de la variable x_n)

- $Sol(S_n)$ est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$.
- $Sol(S_{n-1}) = P_{n-1}(Sol(S_n))$.
- Si S_n est homogène ($b_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq m$), alors $Sol(S_n)$ est un cône de $\mathbb{R}^n$.
- Si S_n est homogène et $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$ pour tout i, j, alors

$$Sol(S_n) \neq \emptyset \iff Sol_{\mathbb{Z}}(S_n) \neq \emptyset.$$

- Si S_n est homogène et $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$ pour tout i, j tels que $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, alors

$$Sol(S_n) \neq \emptyset$$

$$\Longleftrightarrow$$

$\exists (d_1, ..., d_n) \in Sol_{\mathbb{Z}}(S_n)$ tel que $|d_i| \leq (2a)^{(n+1)2^n+1}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ où $a = \text{Max}_{1 \leq i \leq n\ ,\ 1 \leq j \leq m}\ (|a_{i,j}|)$.

Segments discrets

Notations :

Soient $\alpha, \beta \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^\star$.

- $\mathcal{D}(\alpha,\beta) = \{(x, \lfloor \alpha x + \beta \rfloor) \mid x \in \mathbb{Z}\}$.
- Soit $S \subset \mathbb{Z}^2$. $PreImage(S) = \{(\alpha,\beta) \in [0,1]^2 \mid S \subseteq \mathcal{D}(\alpha,\beta)\}$.
- Un sous-ensemble fini S de $\mathbb{Z}^2$ est dit *un segment discret* si S est 8-connexe, pour tout $(x,y) \in S,\ x \geq 0, \quad (0,0) \in S \quad$ et $PreImage(S) \neq \emptyset$.
- $\mathcal{S}_n = \{S \subset \mathbb{Z}^2 \mid S$ est un segment discet et $Card(S) = n\}$.
  $\mathcal{S}_n$ est l'ensemble des segments discrets de taille n.

Propriétés

- Soit S un segment discret. Alors, $PreImage(S)$ est un polygone convexe avec au plus 4 cotés *(généralement 3 ou 4 cotés)*. De plus, si $PreImage(S)$ a 4 cotés, alors deux sommets de ce polygone ont la même abscisse.

- $card(\mathcal{S}_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n}(n - i + 1)\phi(i)$ où ϕ est le fonction d'Euler.

Morceaux de plans discrets

Définitions :
Soient $m, n \in \mathbb{N}^\star$.

- Un sous-ensemble $S \subset \mathbb{Z}^3$ est dit un (m,n)-cube si $P_2(S) = \{(x,y) \mid (x,y,z) \in S\} = [\![0, m-1]\!] \times [\![0, n-1]\!]$ et S est inclus dans un plan discret naïf.

- $\mathcal{M}_{m,n} = \{S \subset \mathbb{Z}^3 \mid S \text{ est un } (m,n) - \text{cube}\}$.

Convexité et propriétés géométriques

Théorème (Helly (1923-1930))
Soit $(K_i)_{1\leq i\leq m}$ une famille d'ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$ tel que $m \geq n+1$. Alors,

$$\bigcap_{1\leq i\leq m} K_i \neq \emptyset$$
$$\Longleftrightarrow$$

pour tout $J \subseteq [\![1, m]\!]$ tel que $\text{Card}(J) = n+1$ on a $\bigcap_{j\in J} K_j \neq \emptyset$.

Convexité et propriétés géométriques

Définitions :

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}^\star$ et $S_1, ..., S_m$ m segments discrets.

- $D(\alpha, \beta) = \{(x, \alpha x + \beta) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
- $\mathcal{D}(\alpha, \beta) = \{(x, \lfloor \alpha x + \beta \rfloor) \mid x \in \mathbb{Z}\}$.
- $S_1, ..., S_m$ sont dits colinéaires s'il existe $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ tels que $\bigcup_{1 \leq i \leq m} S_i \subset \mathcal{D}(\alpha', \beta')$.
- $S_1, ..., S_m$ sont dits parallèles si pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, il existe $(\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{R}^2$ tel que $S_i \subset \mathcal{D}(\alpha_i, \beta_i)$ et les droites $(D(\alpha_i, \beta_i))_{1 \leq i \leq m}$ sont parallèles.
- $S_1, ..., S_m$ sont dits concourants s'il existe pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, il existe $(\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{R}^2$ tel que $S_i \subset \mathcal{D}(\alpha_i, \beta_i)$ et les droites $(D(\alpha_i, \beta_i))_{1 \leq i \leq m}$ sont concourantes.

Convexité et propriétés géométriques

Propriétés :

Soient $m \in \mathbb{N}^\star$ et $S_1, ..., S_m$ m segments discrets.

- $D(\alpha, \beta) = \{(x, \alpha x + \beta) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
- $\mathcal{D}(\alpha, \beta) = \{(x, \lfloor \alpha x + \beta \rfloor) \mid x \in \mathbb{Z}\}$.
- $S_1, ..., S_m$ sont colinéaires si et seulement si pour tout $1 \leq i < j < k \leq m$, S_i, S_j, S_k sont colinéaires.
- $S_1, ..., S_m$ sont parallèles si et seulement si pour tout $1 \leq i < j \leq m$, S_i et S_j sont parallèles.
- $S_1, ..., S_m$ sont concourants si et seulement si pour tout $1 \leq i < j < k \leq m$, S_i, S_j, S_k sont concourants.