L2-AriCry
2015/2016

Correction du contrôle continu 2

1 Calculs arithmétiques

Tous les entiers utilisés dans cet exercice sont représentés en base dix.
Répondre aux questions suivantes en utilisant les propriétés et les algorithmes vus en cours et en justifiant vos réponses :

1. Les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $x * 112 + y * 267 = (112; 267)$.
   On a $(112; 267) = 1$ et $31 * 112 - 13 * 267 = 1$. Donc $\{(31, -13) + k * (112, -267) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation.
2. $220 = 2^2 * 5 * 11$ et $1960 = 2^3 * 5 * 7^2$. Donc $(220; 1960) = 2^2 * 5 = 20$ et $[220; 1960] = 2^3 * 5 * 7^2 * 11 = 21560$.
3. On a $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 et 4 + 5 = 9$. Donc $9|45$ et par conséquent $9|123456789$.
   On a $4 - 8 + 7 - 6 + 5 - 4 + 3 - 2 + 1 = 0$. Donc $11|123456784$.
4. Soient $p_1, p_2, ..., p_i, ..., p_n$ des nombres premiers distincts où $p_i = 6 * a_i + 5$ avec $a_i \in \mathbb{N}^\star$ pour $1 \leq i \leq n$.
   Posons $M = 6 * p_1 * p_2 * ... * p_n + 5$. D'après le Théorème fondamental de l'arithmétique il existe des nombres premiers $q_1, q_2, ..., q_m$ tels que $M = q_1 * q_2 * ... * q_m$ mais comme m n'est ni divisible ni par 2 ni par 3 alors les nombres premiers $q_1, q_2, ..., q_m$ sont soit de la forme $6 * b + 1$ ou $6 * b + 5$ pour $b \in \mathbb{N}$.
   Supposons que les nombres premiers $q_1, q_2, ..., q_m$ sont tous de la forme $6 * b + 1$. Alors, $M = q_1 * q_2 * ... * q_m$ est aussi de la forme $6 * b + 1$ ce qui est absurde car $M = 6 * p_1 * p_2 * ... * p_n + 5$, et donc M est de la forme $6 * b + 5$. Donc il existe un entier i_0 entre 1 et m tel que q_{i_0} est de la forme $6 * b + 5$. Comme M n'est divisible par aucun des p_i pour $1 \leq i \leq n$, et que $q_{i_0} | M$, alors $q_{i_0} \neq p_i$ pour $1 \leq i \leq n$.
   Donc il y a une infinité de nombres premiers de la forme $6 * b + 5$ pour $b \in \mathbb{N}$.

2 Base d'énumération

1. $\frac{1}{(31)_{10}} = \frac{1}{32-1} = \frac{1}{2^5-1} = \Sigma_{n>0} \frac{1}{2^{5n}} = 0.\overline{00001}$.
2. Soit $\mathcal{B} = \{-1, 0, 1\}$
   (a) Le même principe de démonstration que celle donnée en cours concernant l'existance et l'unicité de la représntation d'une entier dans une base donnée $b \geq 2$.

   (b) Remarque : En utilisant l'identité $2 * 3^i = 3^{i+1} - 3^i$ pour tout entier $i \geq 0$ et en gérant les retenues, on obtient $(12212)_{trois} = (1(-1)00(-1)(-1))_{\mathcal{B}}$.

(c) Soient $n \in \mathbb{N}$ et a_n le tableau de taille k contenant la représentation en base *trois* de l'entier n c'est-à-dire que

$$n \ = \ \Sigma_{0 \leq i \leq k} a_n[i] * 2^i$$

avec $a_n[i] \in \{0, 1, 2\}$ pour $0 \leq i \leq k$ et $a_n[k] \neq 0$.
En utilisant l'identité $2 * 3^i = 3^{i+1} - 3^i$ pour tout entier $i \geq 0$ et en gérant les retenues, on obtient l'algorithme suivant permettant de passer de la représentation d'un nombre en base 3 à sa représentation sous la forme donnée en (a).

$r \ := \ 0$;
Pour i de 0 à k faire
Début
$s \ := \ a_n[i] + r$;
Si $s \ = \ 2$ alors
Début
$a_n[i] \ := \ -1$;
$r \ := \ 1$;
Fin
Sinon Si $s \ = \ 3$ alors
Début $a_n[i] \ := \ 0$;
$r \ := \ 1$;
Fin
Sinon
Début
$a_n[i] \ := \ 1$;
$r \ := \ 0$;
Fin
Fin
Si $r \ = \ 1$ alors $a_n[k+1] \ := \ 1$;