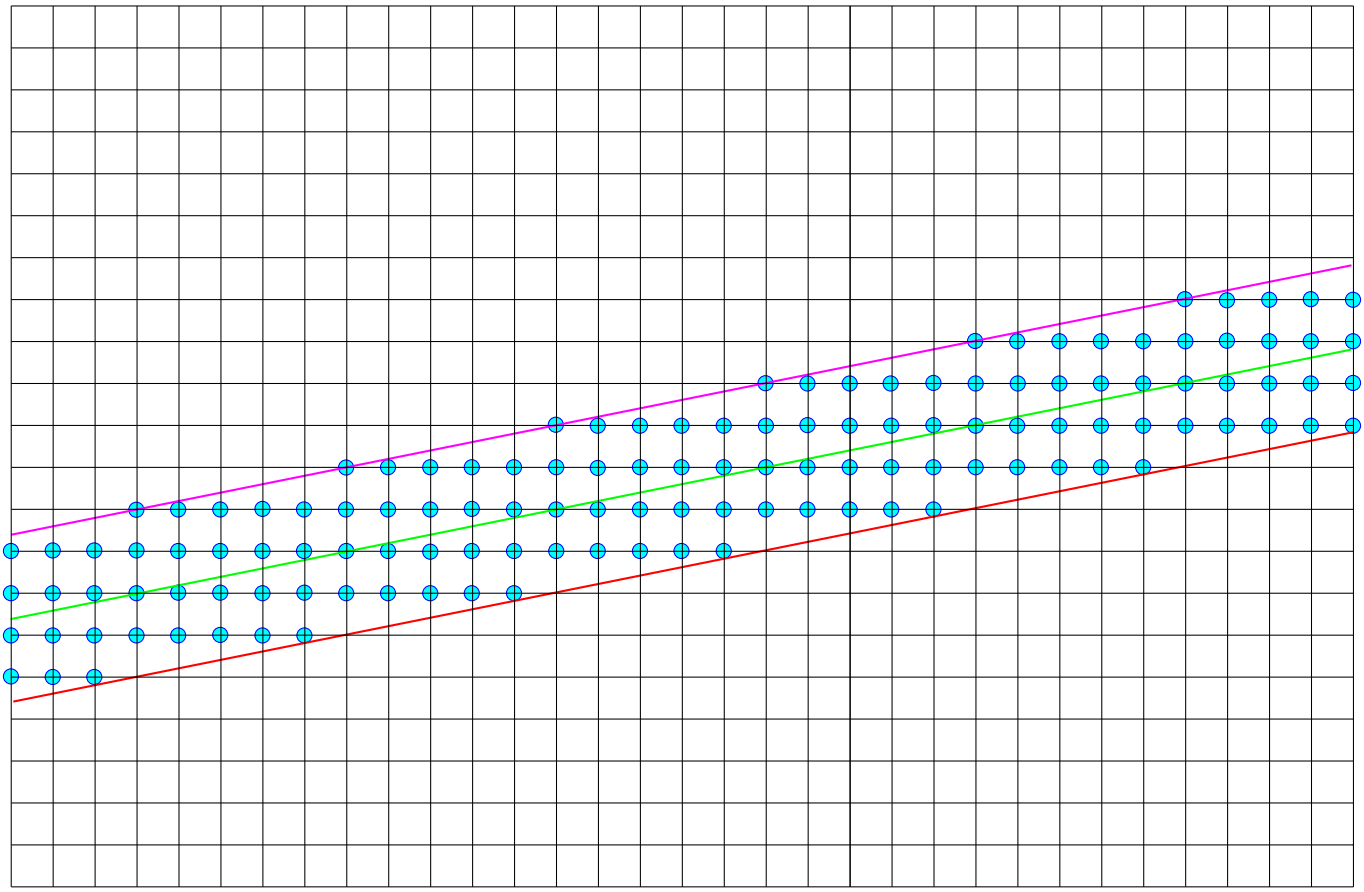
# Les Droites discrètes

Soient $a, b, c, \omega \in \mathbb{Z}$ avec $\omega > 0$ :

$$\mathcal{D}(a, b, c, \omega) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \quad | \quad 0 \leq ax - by + c < \omega\}$$

- $\frac{a}{b}$ est la `pente` de $\mathcal{D}(a, b, c, \omega)$.
- $(a, -b)$ est le `vecteur normal` de $\mathcal{D}(a, b, c, \omega)$.
- $c$ est la `phase` de $\mathcal{D}(a, b, c, \omega)$.
- $\omega$ est l'`épaisseur arithmétique` de $\mathcal{D}(a, b, c, \omega)$.



Points de la droite discrete D(1,6,12,24) ; La droite reelle : x−6y=0

La droite reelle : x−6y−12=0 ; La droite reelle : x−6y+12=0

- $\mathcal{D}(a,b,c,\omega) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \quad | \quad \lfloor \frac{ax-by+c}{\omega} \rfloor = 0\}$

- $0 \leq ax-by+c < \omega \iff \begin{cases} ax-by+c = 0 & \text{ou} \\ ax-by+c = 1 & \text{ou} \\ \ldots & \\ ax-by+c = \omega-2 & \text{ou} \\ ax-by+c = \omega-1 \end{cases}$

Autrement dit les points de la droite discrète sont les solutions des équation diophantiennes qui sont de la forme :

$$ax - by = e$$

où $e = -c$ ou $-c+1$ ou ... ou $-c+\omega-1$.

Problème : Déterminer les $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ telque

$$ax - by = e \quad (\star)$$

où $a, b$ et $e$ sont des entiers donnés.

**Propriétés**

- L'équation diophantienne $(\star)$ admet une solution si et seulement si $g = pgcd(a, b)$ divice $e$.
- $\{(x_0, y_0) + k(\frac{b}{g}, \frac{a}{g}) \quad | \quad k \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble de toutes les solutions de l'équation diophantienne $(\star)$ où $g$ divise $e$ et $(x_0, y_0)$ est une solution particulière de l'équation diophantienne $(\star)$.

**Problème :** Comment trouver une solution particulière $(x_0, y_0)$ de l'équation diophantienne $(\star)$ ?

## Algorithme d'Euclide avec combinaison linéaire

Données : $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $b \geq a \geq 0$

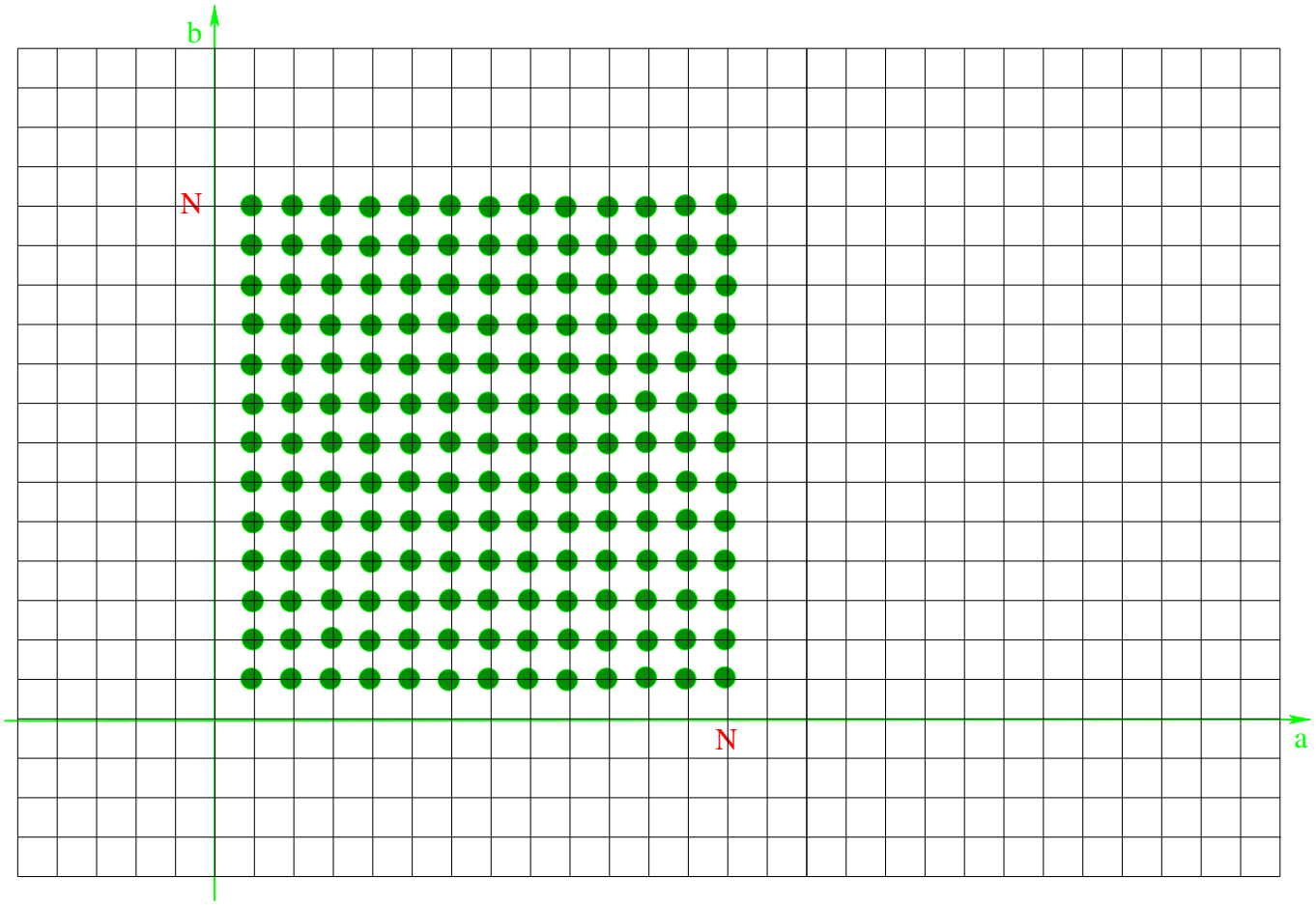
Considérons la suite des triplets $\vec{v}_i = (t_i, \alpha_i, \beta_i)$ telle que
$\vec{v}_0 = (b, 0, 1)$
$\vec{v}_1 = (a, 1, 0)$
$\vec{v}_{i+1} = \vec{v}_{i-1} - q_{i+1}\vec{v}_i$
où $q_{i+1} = \lfloor \frac{t_{i-1}}{t_i} \rfloor$ est le quotient de la division de $t_{i-1}$ par $t_i$ pour $i \geq 1$.
On s'arrête au premier entier $n$ tel que $t_n = 0$.

On a alors

$$pgcd(a, b) = t_{n-1} = \alpha_{n-1}a + \beta_{n-1}b$$

$$\rightsquigarrow \vec{v}_{n-1} = (t_{n-1}, \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}).$$

# Algorithme d'Euclide avec combinaison linéaire




$NEAE(a,b)$ = nombre d'étapes utilisées par l'algorithme d'Euclide pour calculer le $pgcd(a,b)$.

$$E(N) = \frac{1}{N^2}\sum_{a=1}^{N}\sum_{b=1}^{N} NEAE(a,b) = \frac{12\ln(2)}{\pi^2}\ln(N)+O(1)$$

$$\approx 0.842765913\ln(N) + 0.06.$$

**Propriétés :**
Soient $a, b, c, \omega \in \mathbb{Z}$ avec $\omega > 0$.

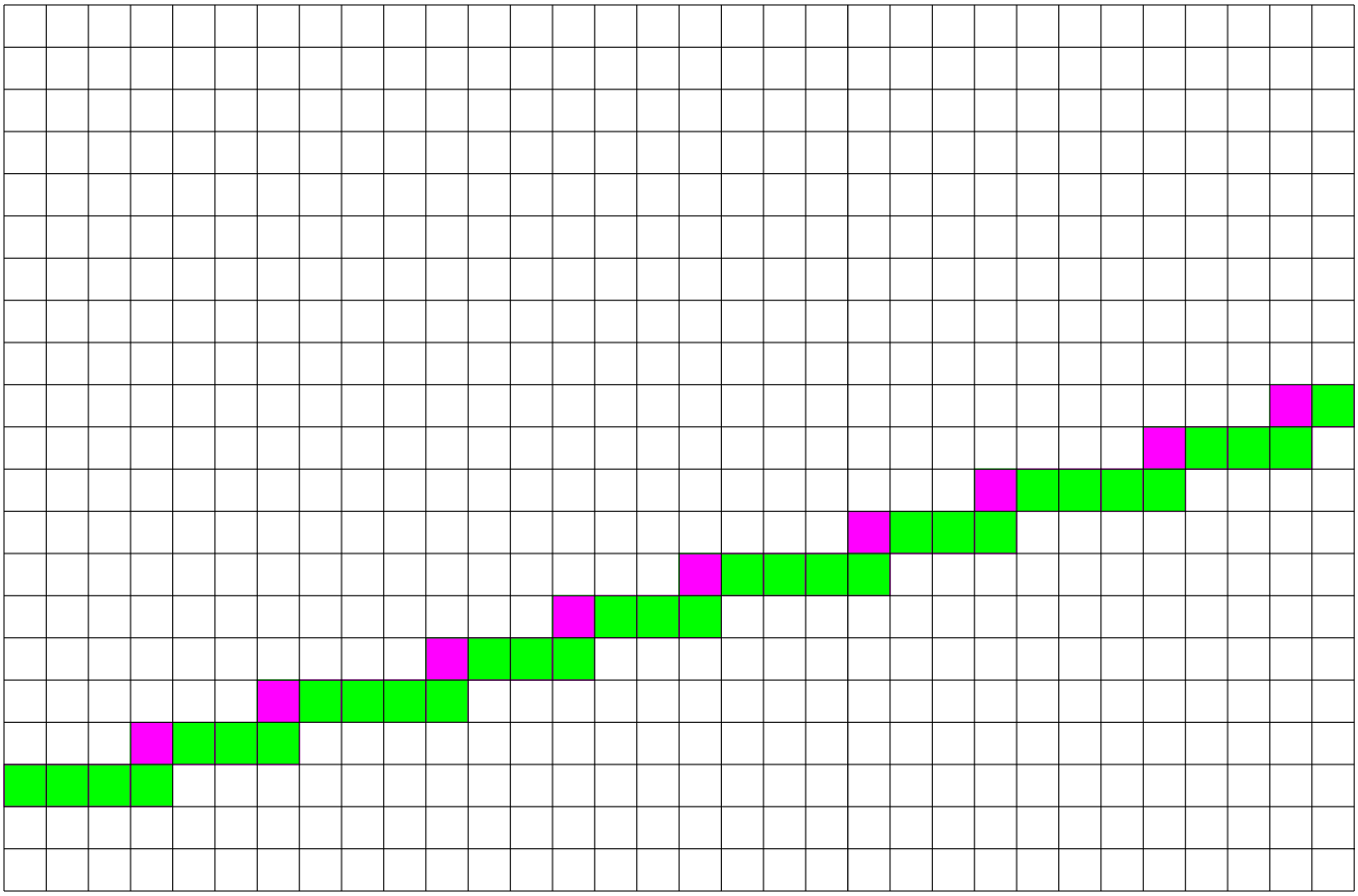
- $\mathcal{D}(a, b, c, \omega)$ est 8-connexe si et seulement si $\omega \geq \sup(|a|, |b|)$.

- $\mathcal{D}(a, b, c, \omega)$ est 4-connexe si et seulement si $\omega \geq |a| + |b|$.

**Définitions :**
Soient $a, b, c, \omega \in \mathbb{Z}$ avec $\omega > 0$.

- Si $\omega = \sup(|a|, |b|)$, $\mathcal{D}(a, b, c, \omega)$ est dite une droite discrète naïve.

- Si $\omega = |a| + |b|$, $\mathcal{D}(a, b, c, \omega)$ est dite une droite discrète standard.



: La droite naive D(5,17,0,17)

, : La droite standard D(5,17,0,23)