Quelques propriétés combinatoires des mots de Sturm

Mohamed Tajine

ICube UMR 7357, Université de Strasbourg, MIV
Cours de Géométrie Discrète, Master 2

Outline

1. Mots de Stum et droite discrète
   - Utilisations des droites et des ségments discrets en analyse d'image
2. Segment discret
   - Nombres de Farey
   - Pré-Image d'un segment discret
3. Fréquences de segments discret
   - Définitions et propriétés des fréquences
   - Propriétés des fréquences et combinatoire des mots de Sturm
   - Propriété des 3 intervalles
   - Dénombrement des mots de Sturm

Outline

1. Mots de Stum et droite discrète
   - Utilisations des droites et des ségments discrets en analyse d'image
2. Segment discret
   - Nombres de Farey
   - Pré-Image d'un segment discret
3. Fréquences de segments discret
   - Définitions et propriétés des fréquences
   - Propriétés des fréquences et combinatoire des mots de Sturm
   - Propriété des 3 intervalles
   - Dénombrement des mots de Sturm

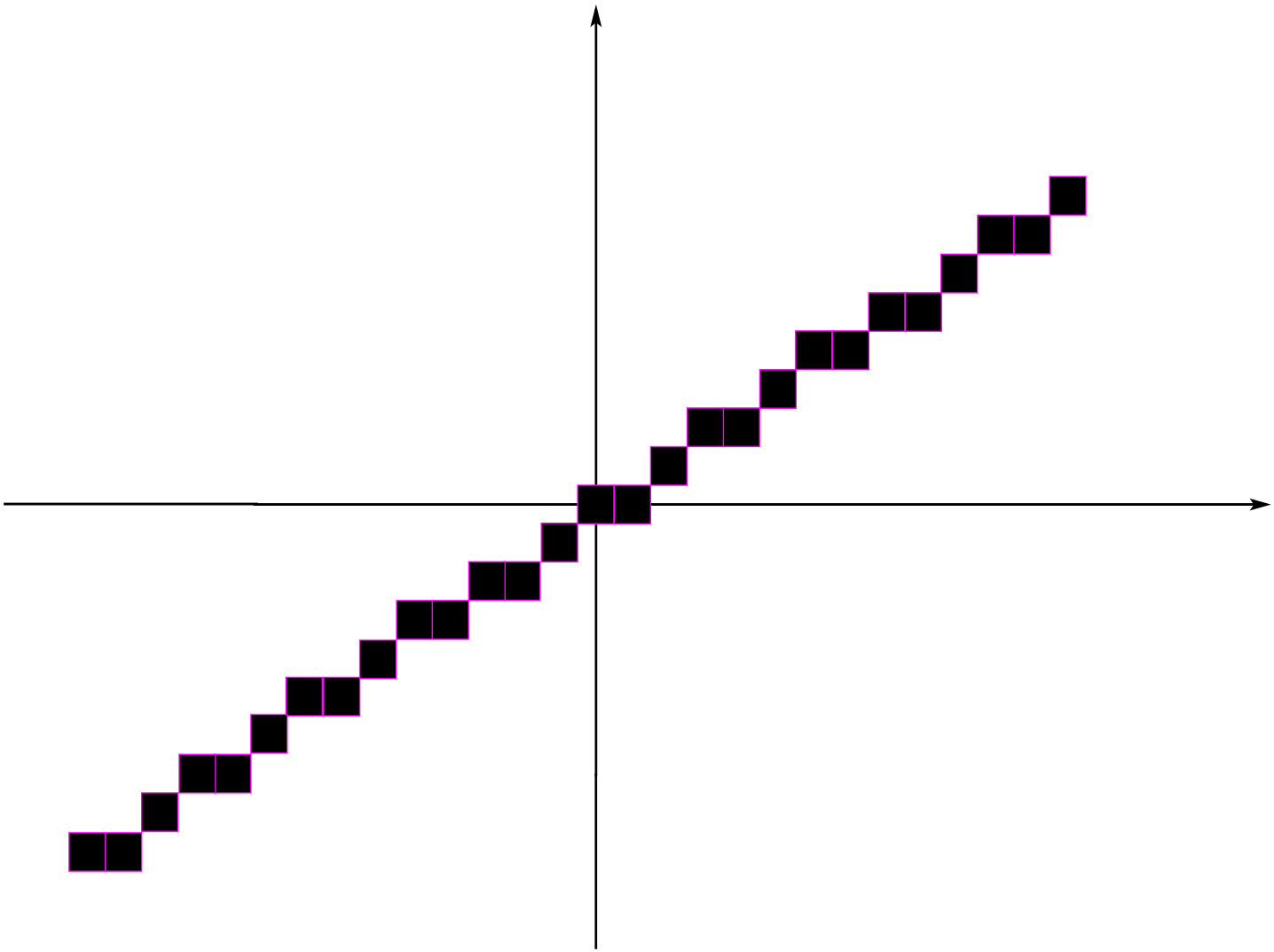
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \leq b$, $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta \in [0, 1]$.

- $[\![a, b]\!] = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n \leq b\}$.
- $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x (i.e. $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$).
- $\langle x \rangle$ est la partie fractionnaire de x (i.e. $x = \lfloor x \rfloor + \langle x \rangle$).
- $\mathfrak{D}(\alpha, \beta) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq \alpha x + \beta - y < 1\} = \{(x, \lfloor \alpha x + \beta \rfloor) \mid x \in \mathbb{Z}\}$ est appelé la droite naïve de pente α et de phase β.

Propriété

Soit $x, r \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\lfloor x + r \rfloor - \lfloor x \rfloor = \begin{cases} \lfloor r \rfloor \text{ si } \langle x \rangle < 1 - \langle r \rangle, \\ \lfloor r \rfloor + 1 \text{ sinon} \end{cases}$$



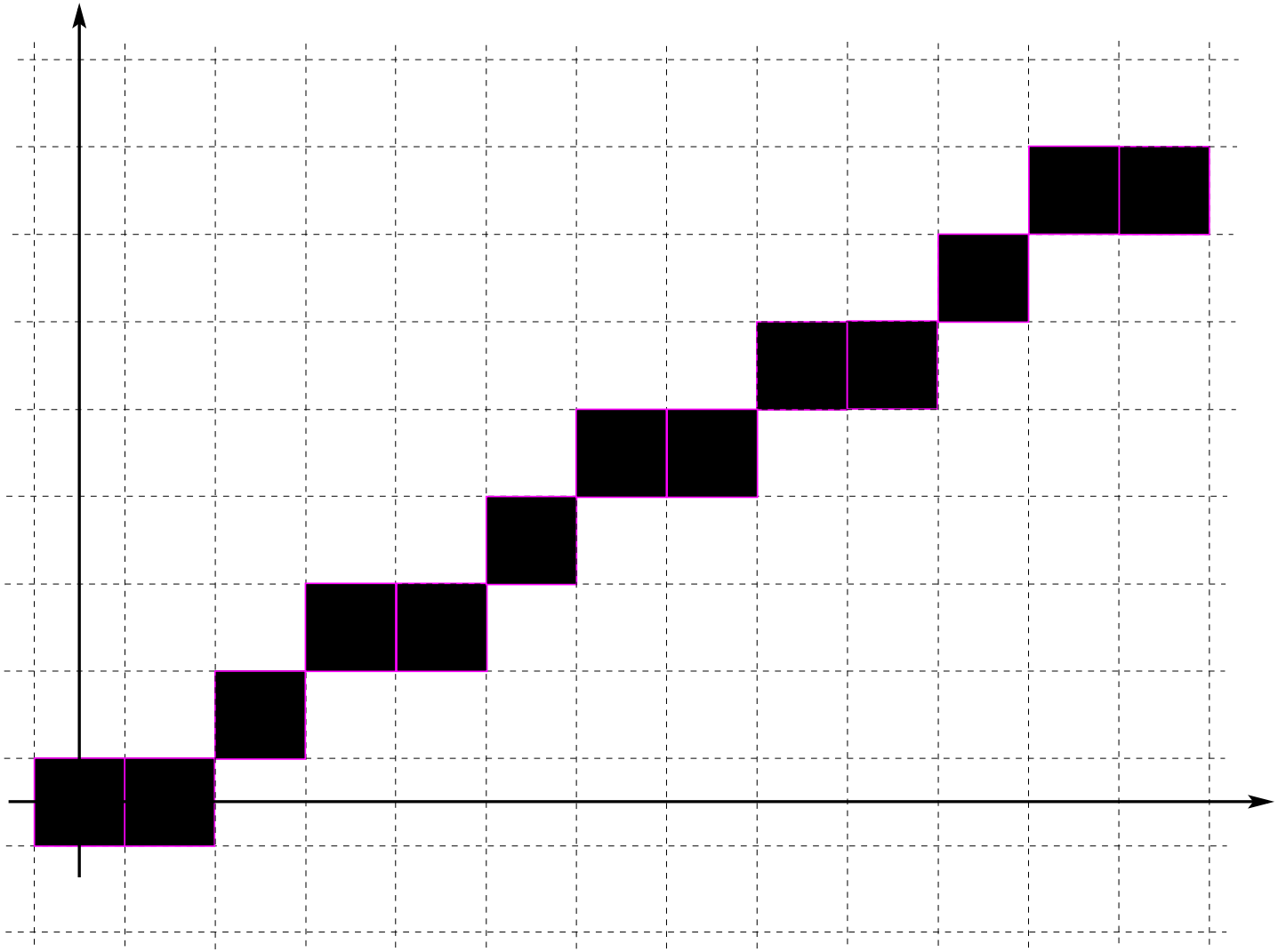
$$\mathfrak{D}(\tfrac{7}{11}, \tfrac{1}{5})$$

Outline

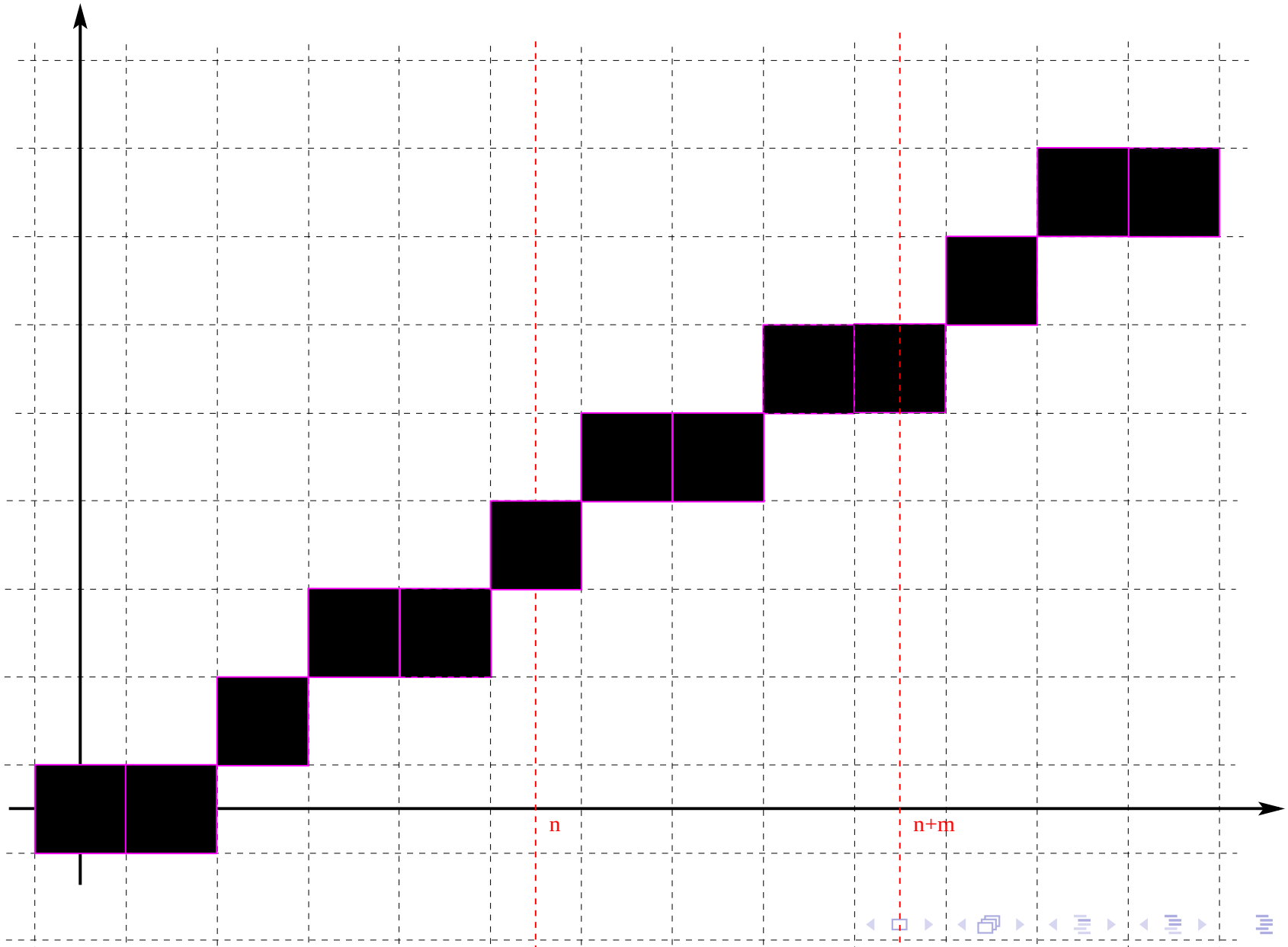
1. Mots de Stum et droite discrète
   - Utilisations des droites et des ségments discrets en analyse d'image
2. Segment discret
   - Nombres de Farey
   - Pré-Image d'un segment discret
3. Fréquences de segments discret
   - Définitions et propriétés des fréquences
   - Propriétés des fréquences et combinatoire des mots de Sturm
   - Propriété des 3 intervalles
   - Dénombrement des mots de Sturm

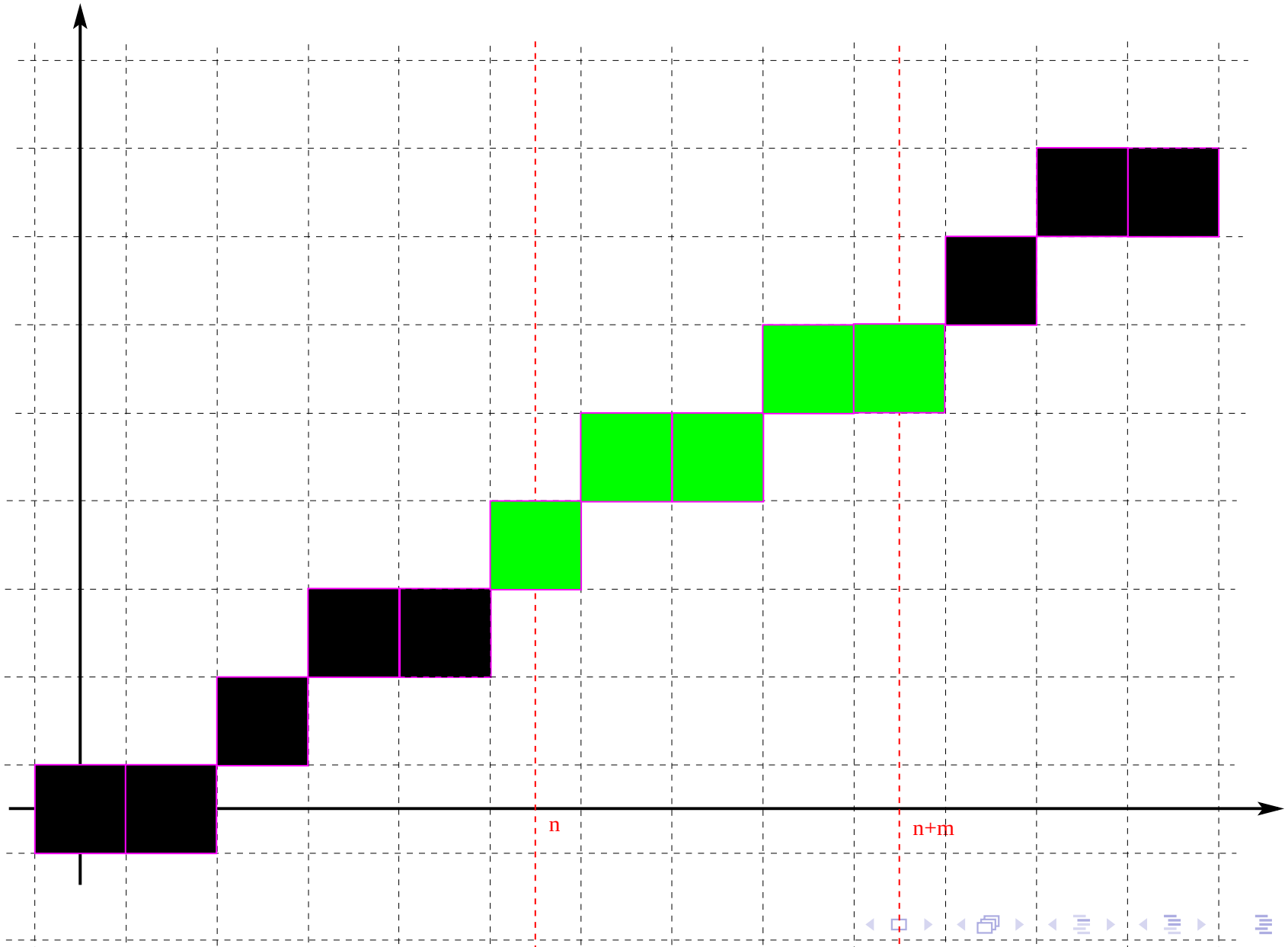
Soient $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $m > 0$ et $\alpha, \beta \in [0, 1]$.

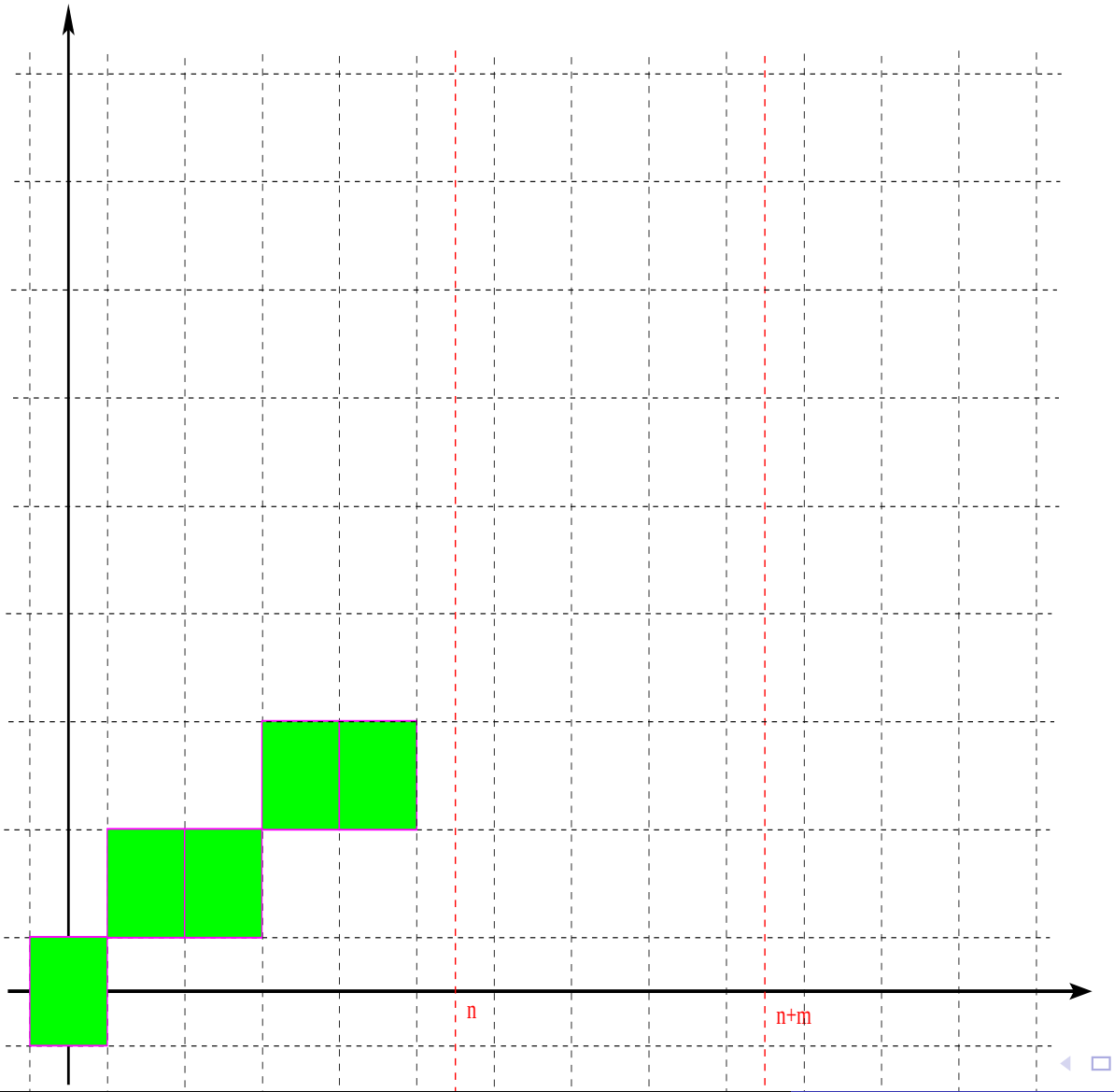
- $S(m, n, \alpha, \beta) = \{(x, \lfloor \alpha x + \beta \rfloor) \mid x \in [\![n, n + m]\!]\}$ est appelé un segment digital. Le point $p_0 = (n, \lfloor \alpha n + \beta \rfloor)$ est appelé le début du segment digital $S(m, n, \alpha, \beta)$.
- $S'(m, n, \alpha, \beta) = \{p - p_0 \mid p \in S(m, n, \alpha, \beta)\}$ est appelé un segment discret. m est appelé la taille du segment discret $S'(m, n, \alpha, \beta)$. Donc $S(m, n, \alpha, \beta)$ (respectivement $S'(m, n, \alpha, \beta)$) peut être vu comme une fonction de $[\![0, m]\!]$ dans $\mathbb{Z}$.
- $\mathcal{C}(m, \alpha, \beta) = \{S'(m, n, \alpha, \beta) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ qui correspond à l'esnemble des segments digitaux de taille m de la droite discète $\mathfrak{D}(\alpha, \beta)$.
- $\mathfrak{S}_m = \{S'(m, 0, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in [0, 1]\}$.

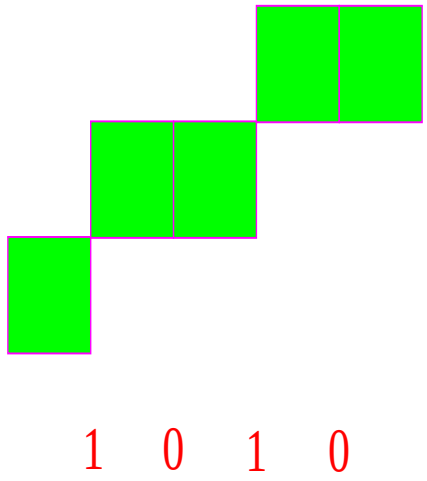


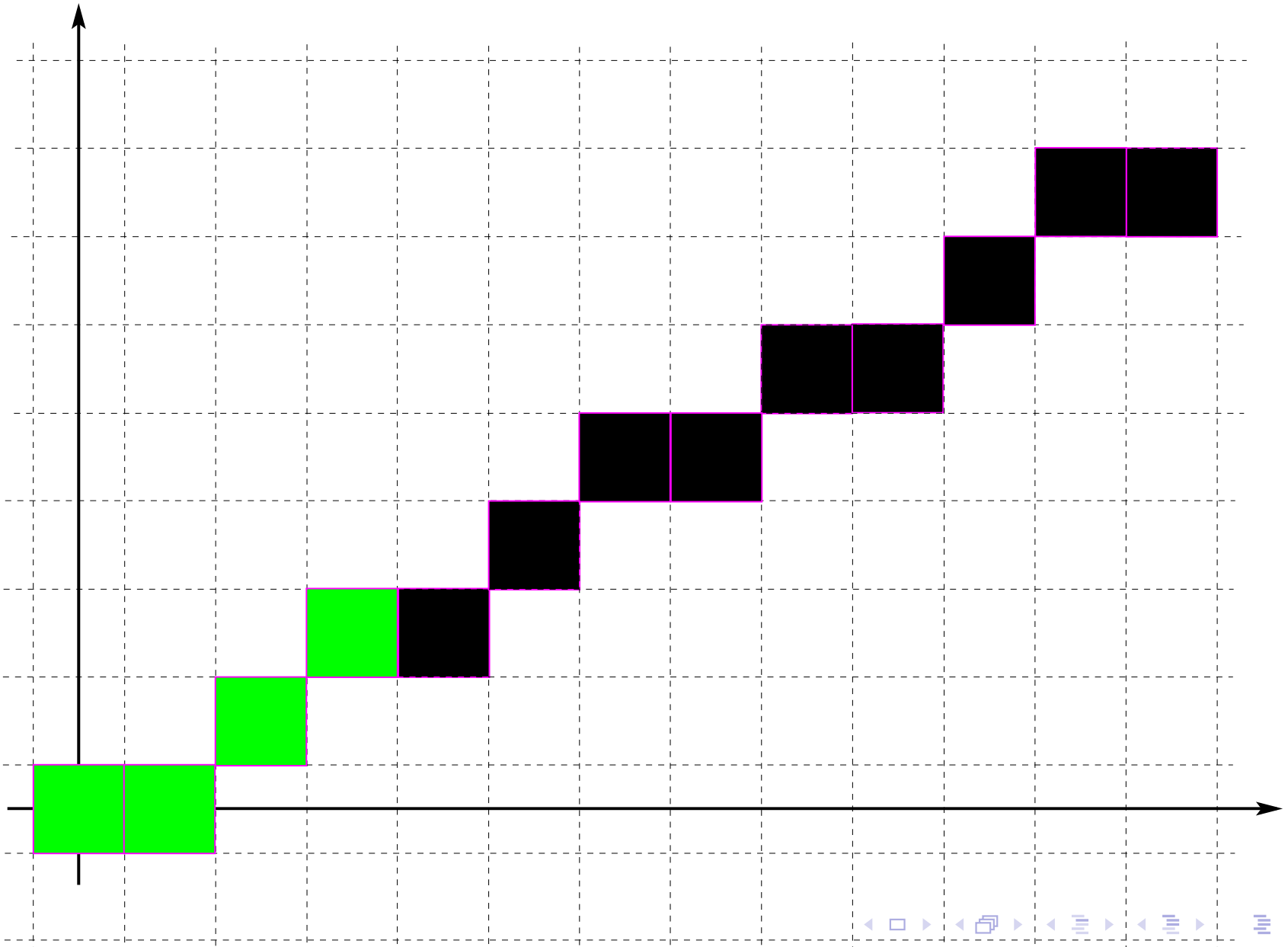
$$\mathfrak{D}(\tfrac{7}{11}, \tfrac{1}{5})$$

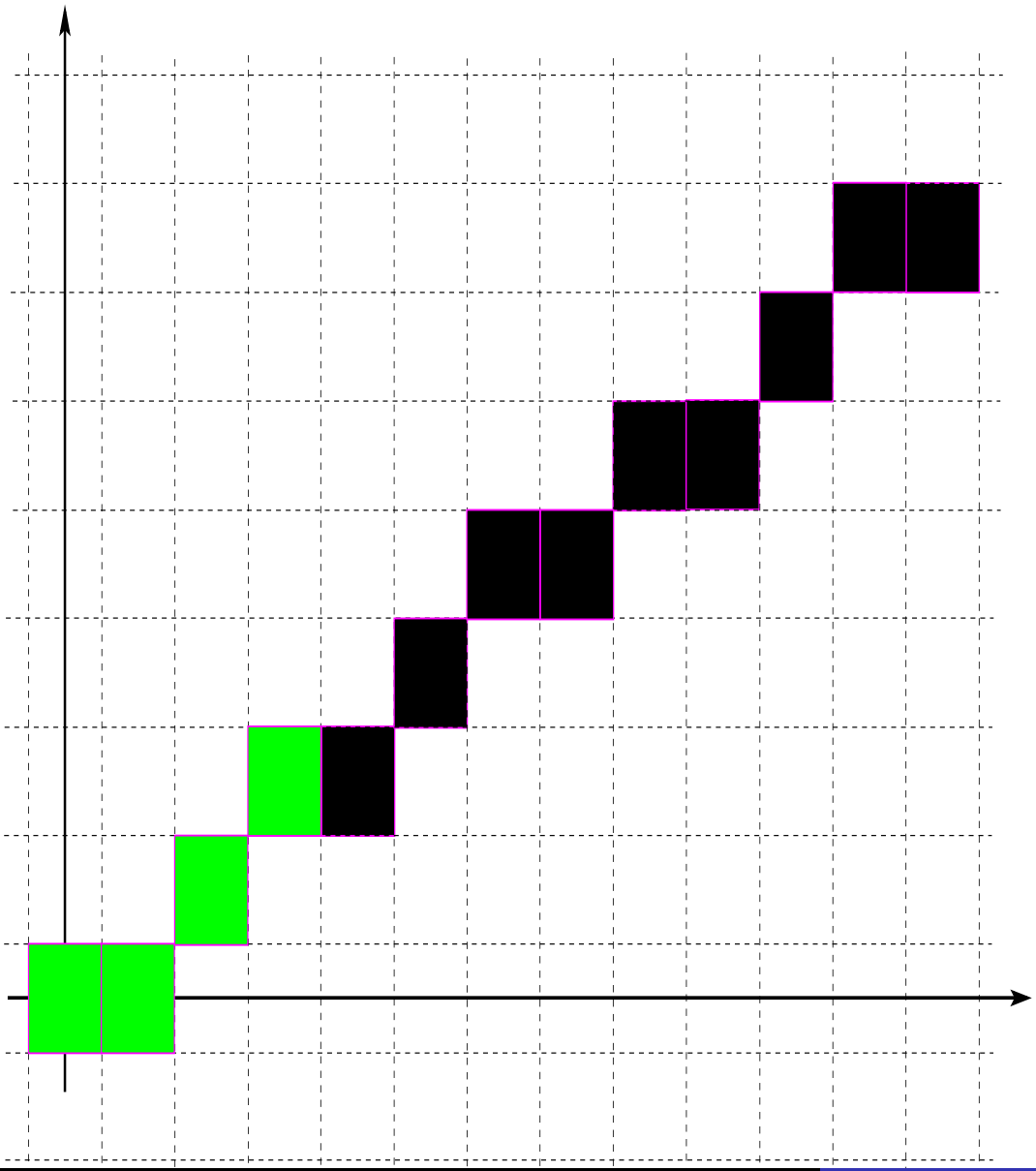

n
n+m

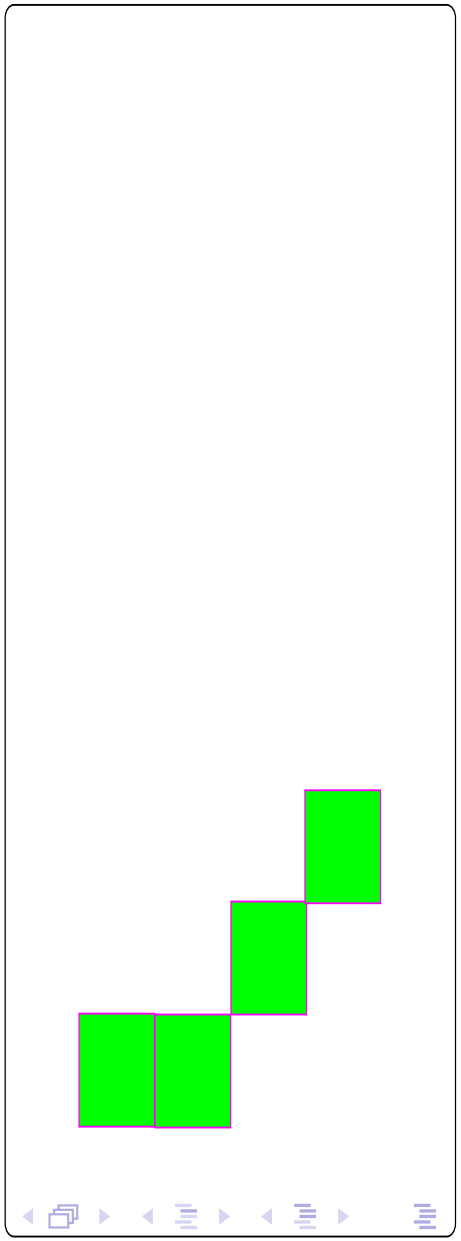

n
n+m

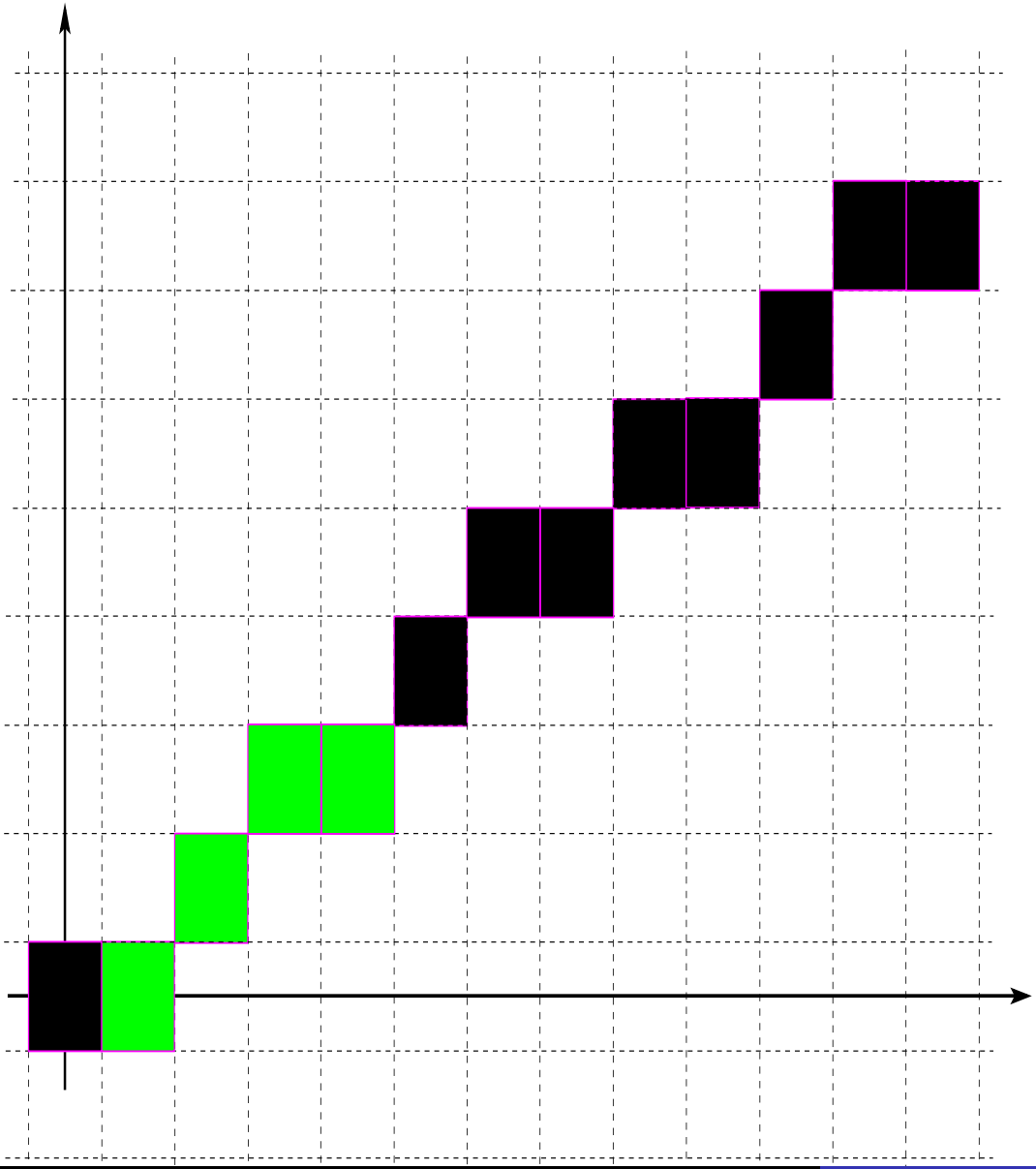

n
n+m

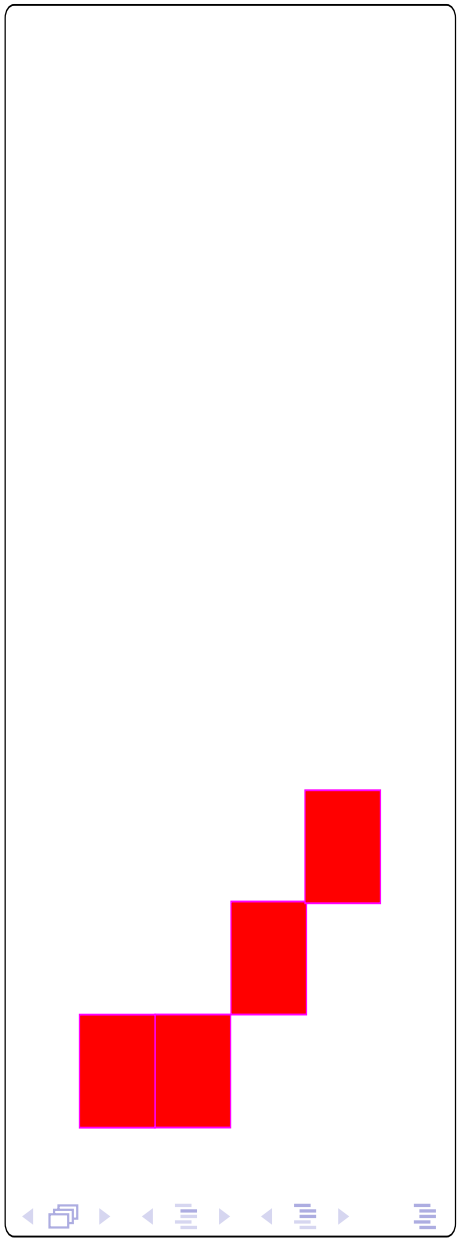

1 0 1 0

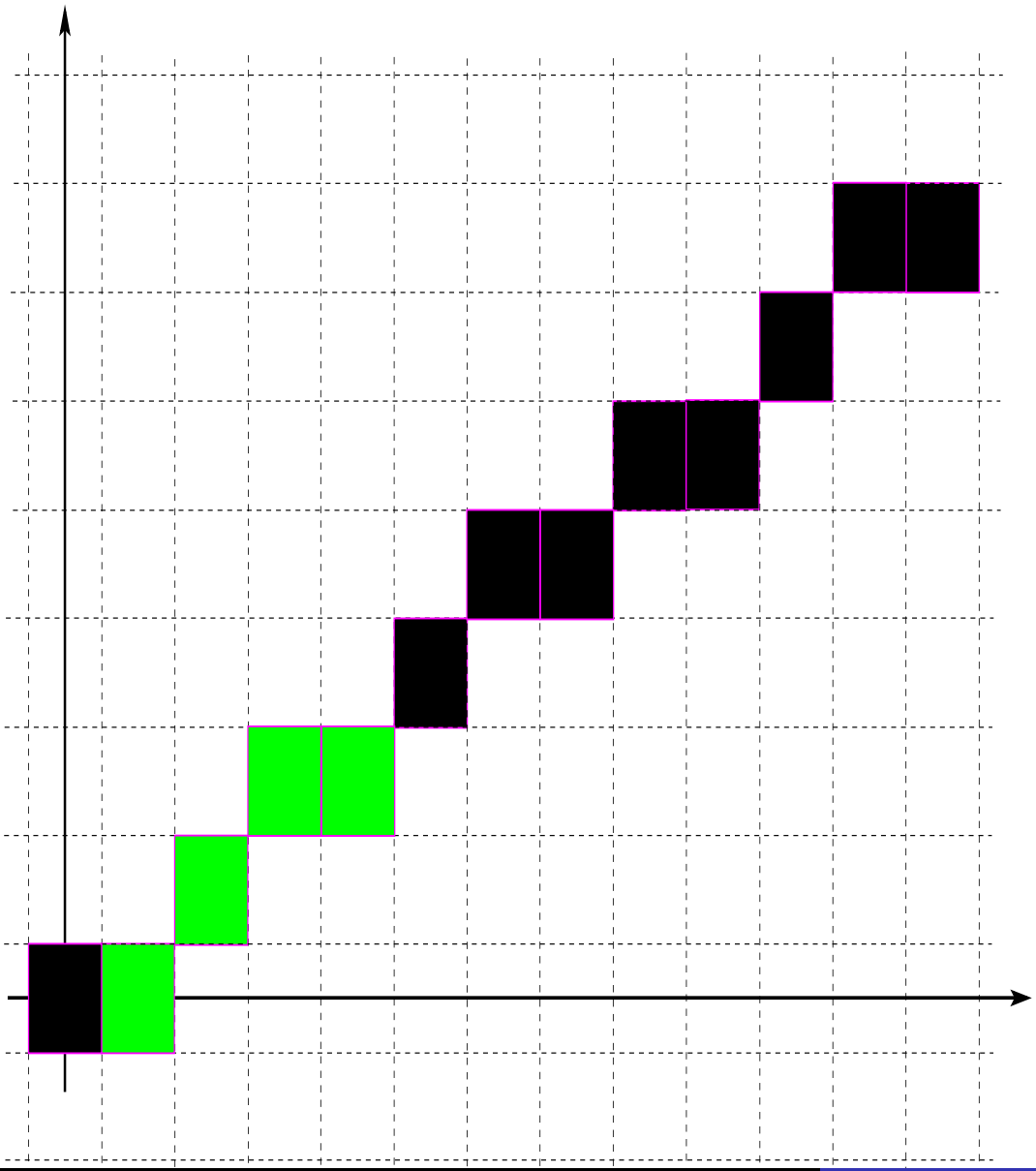


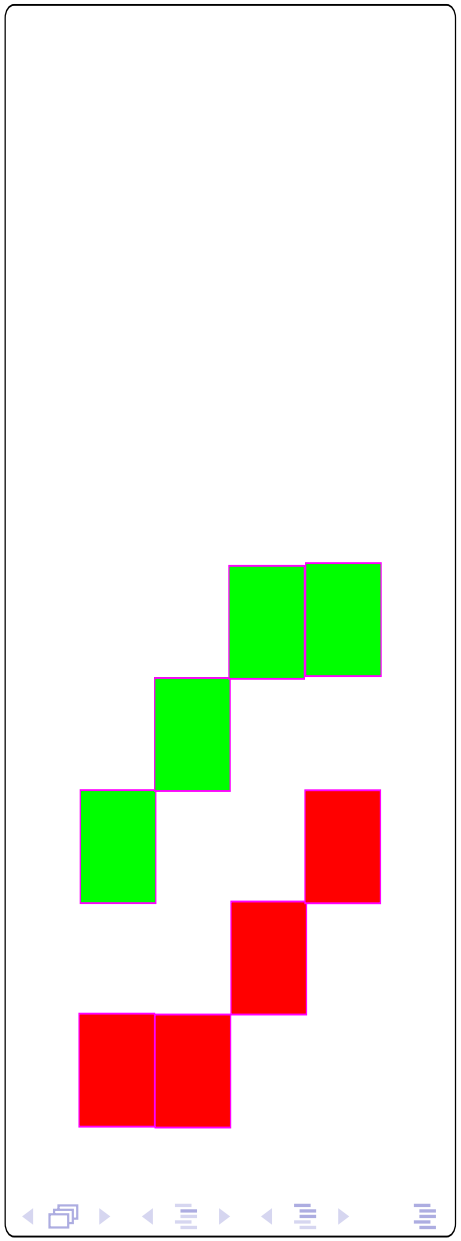


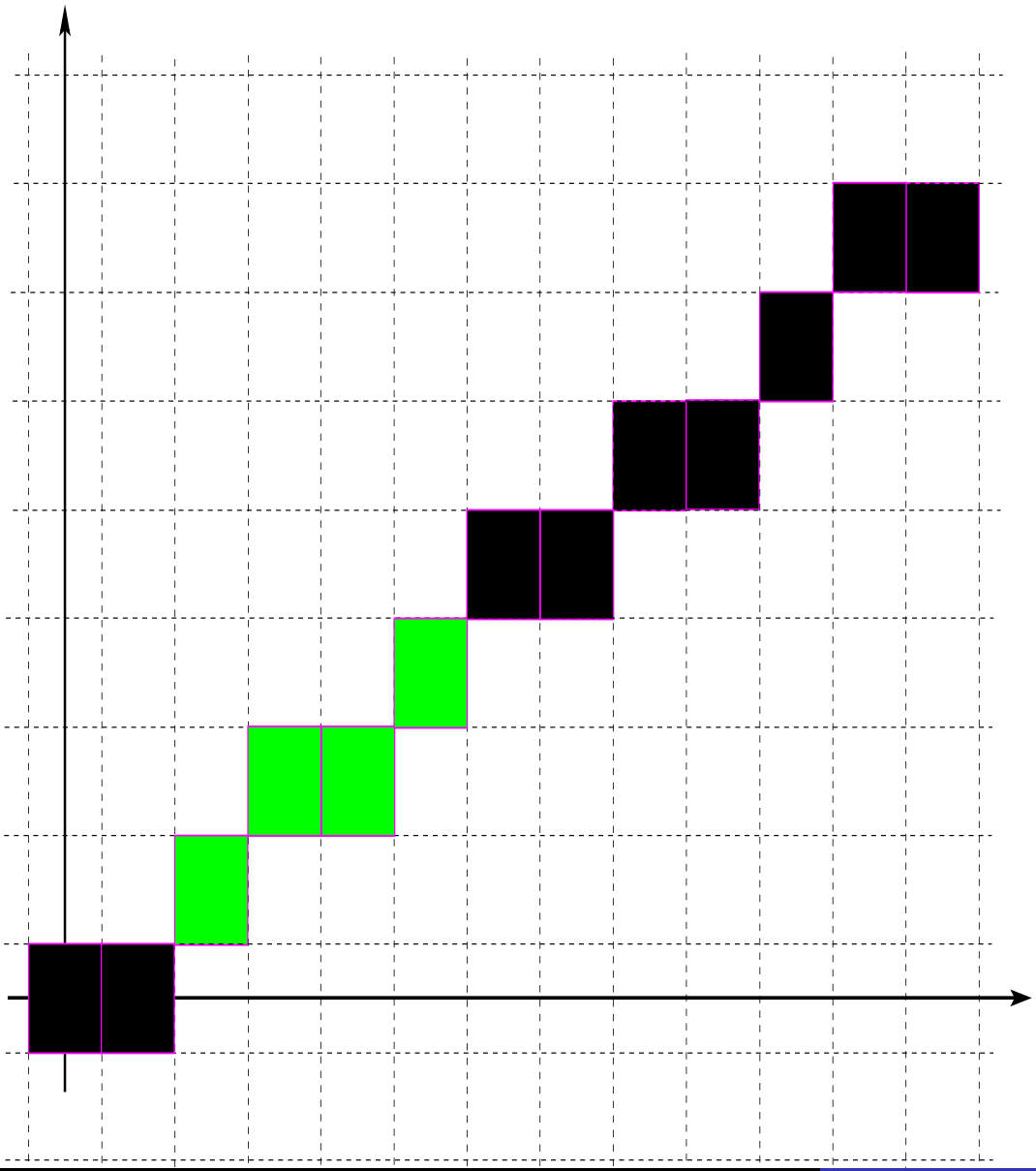


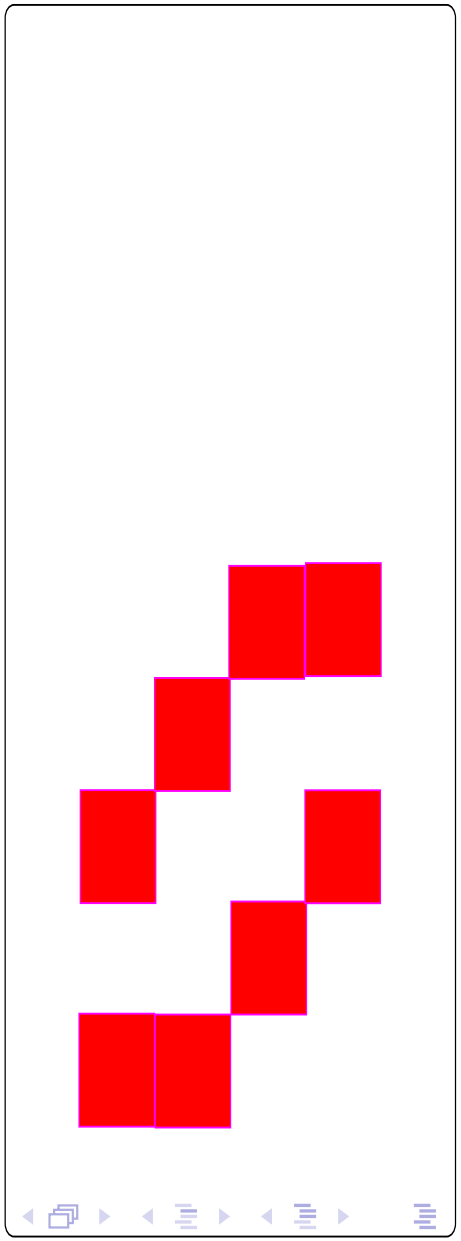


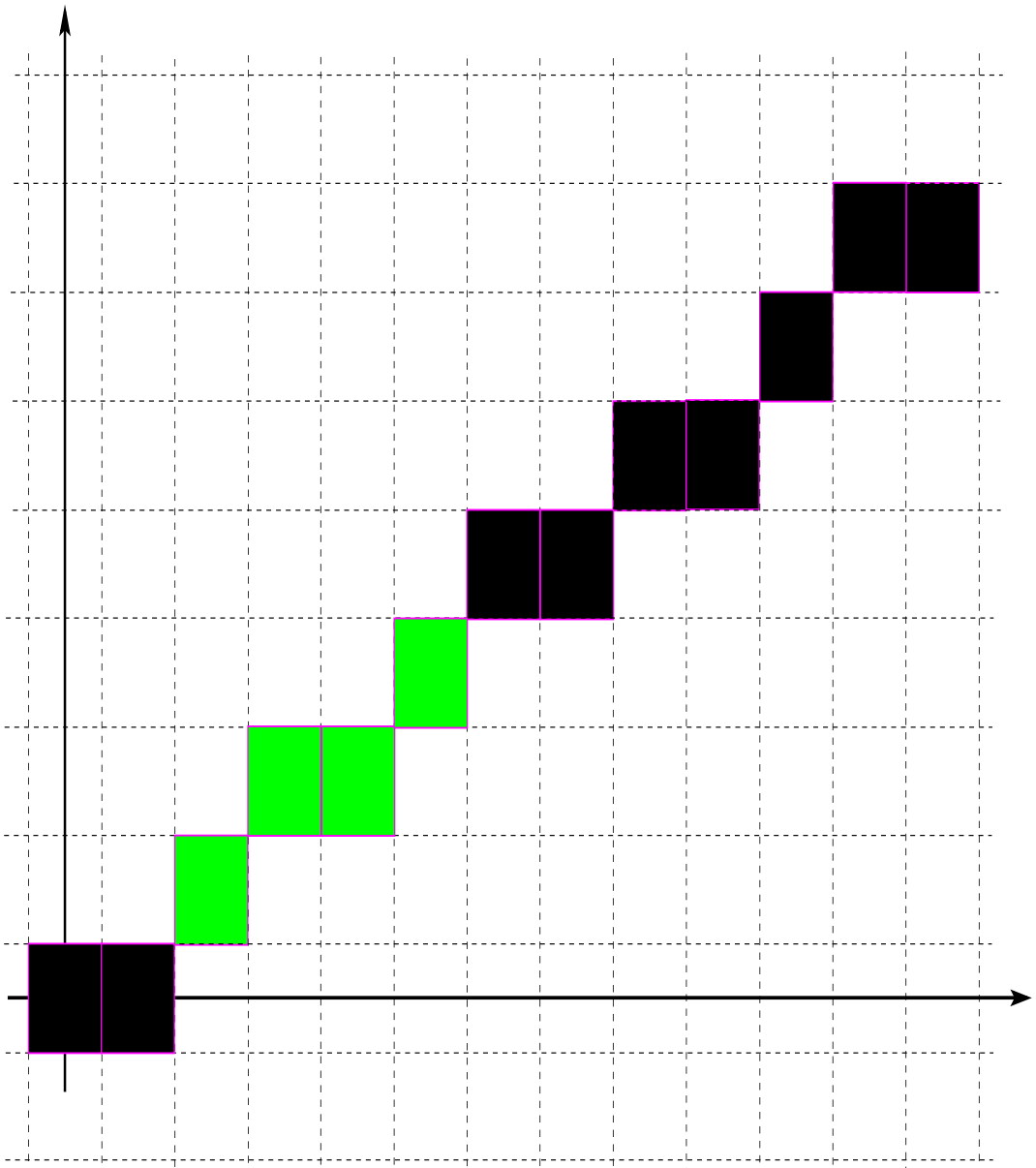


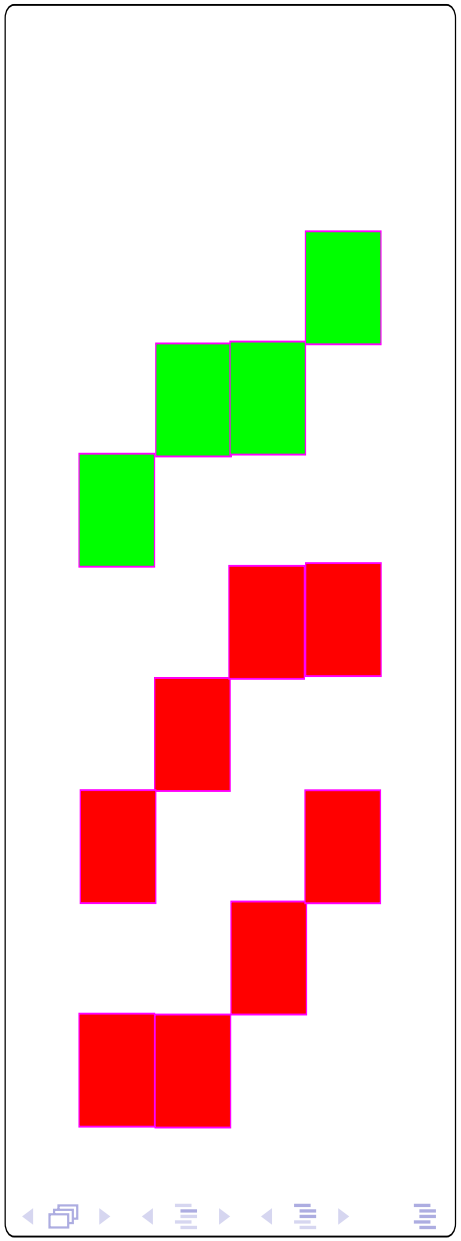


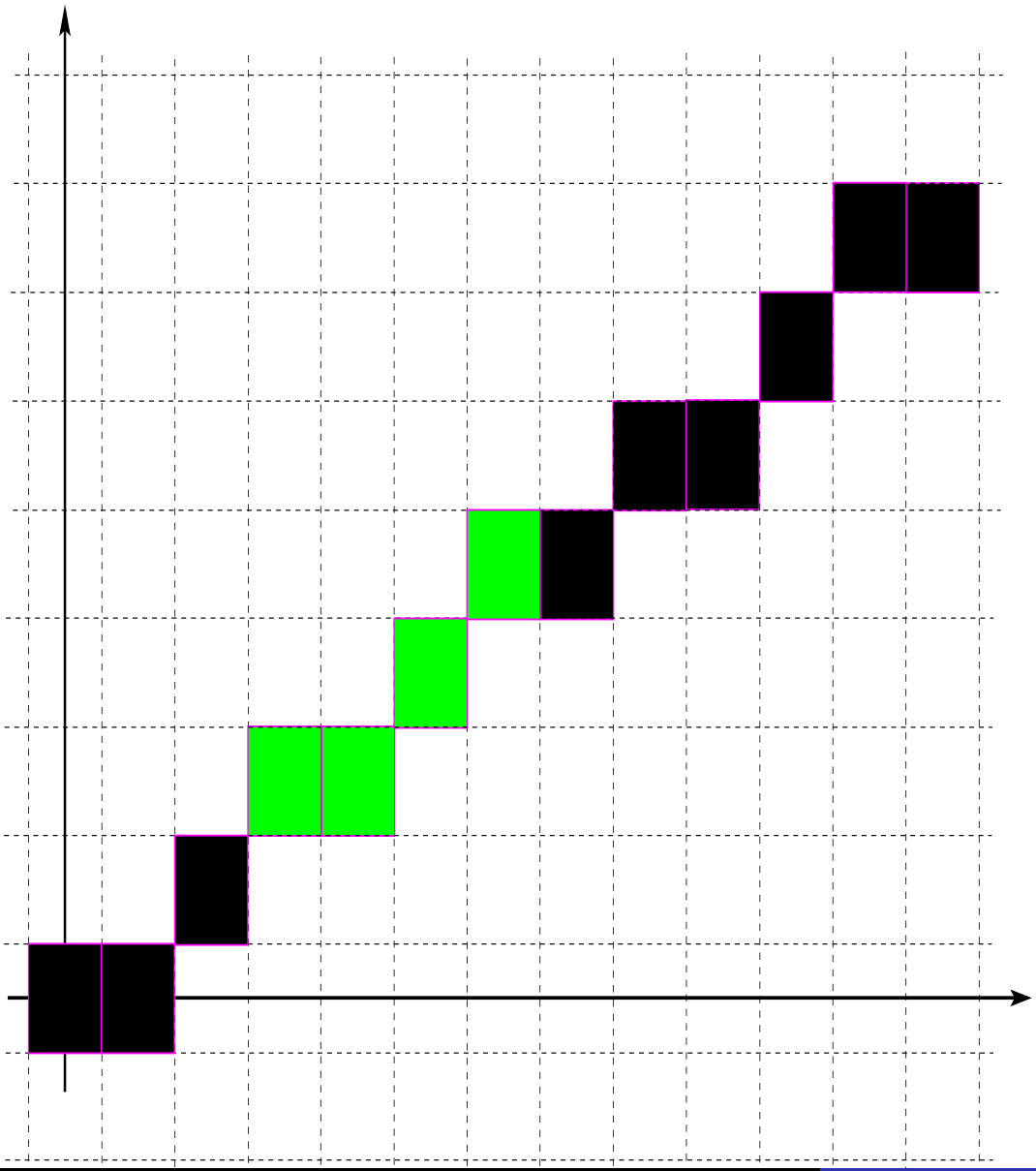


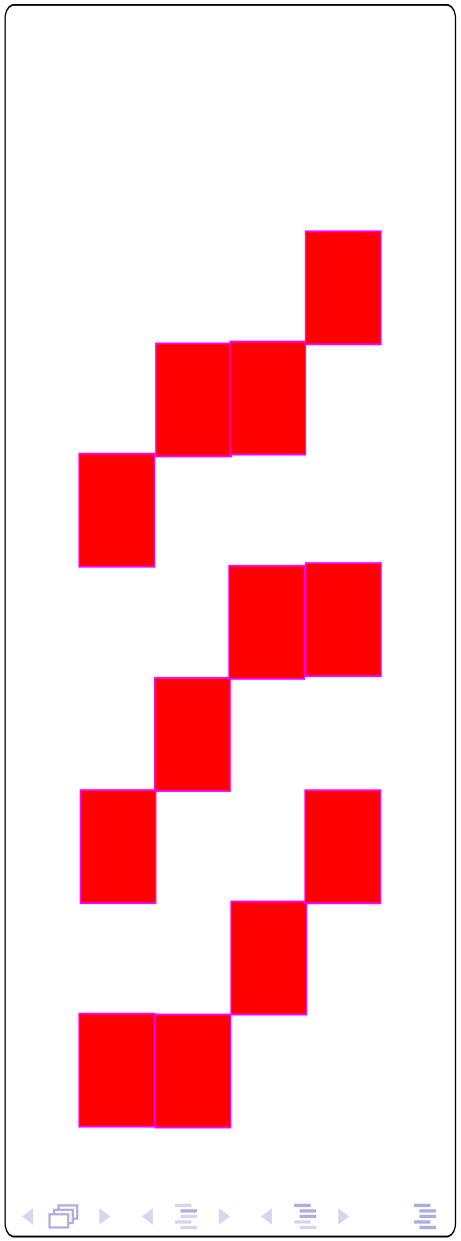


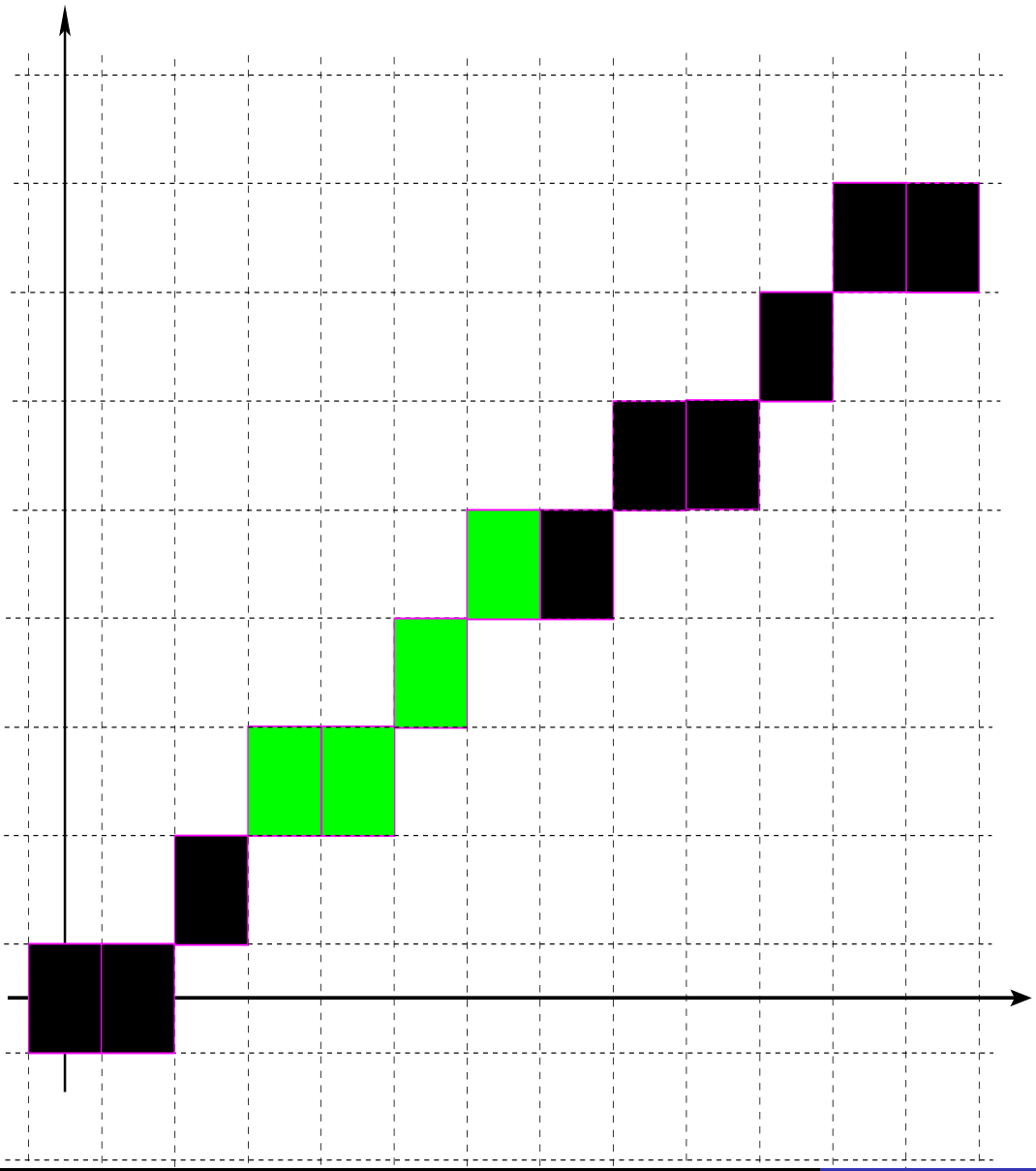


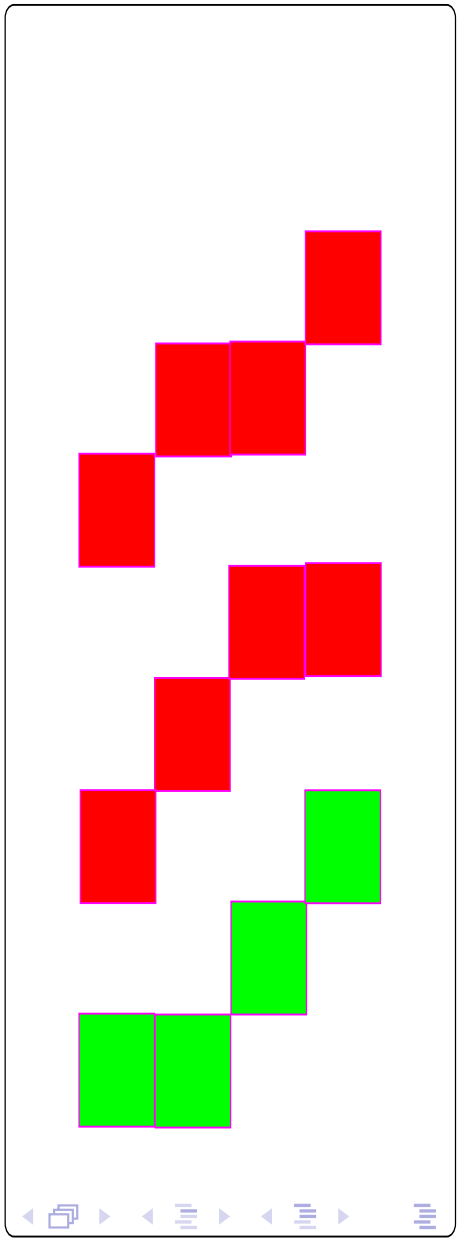


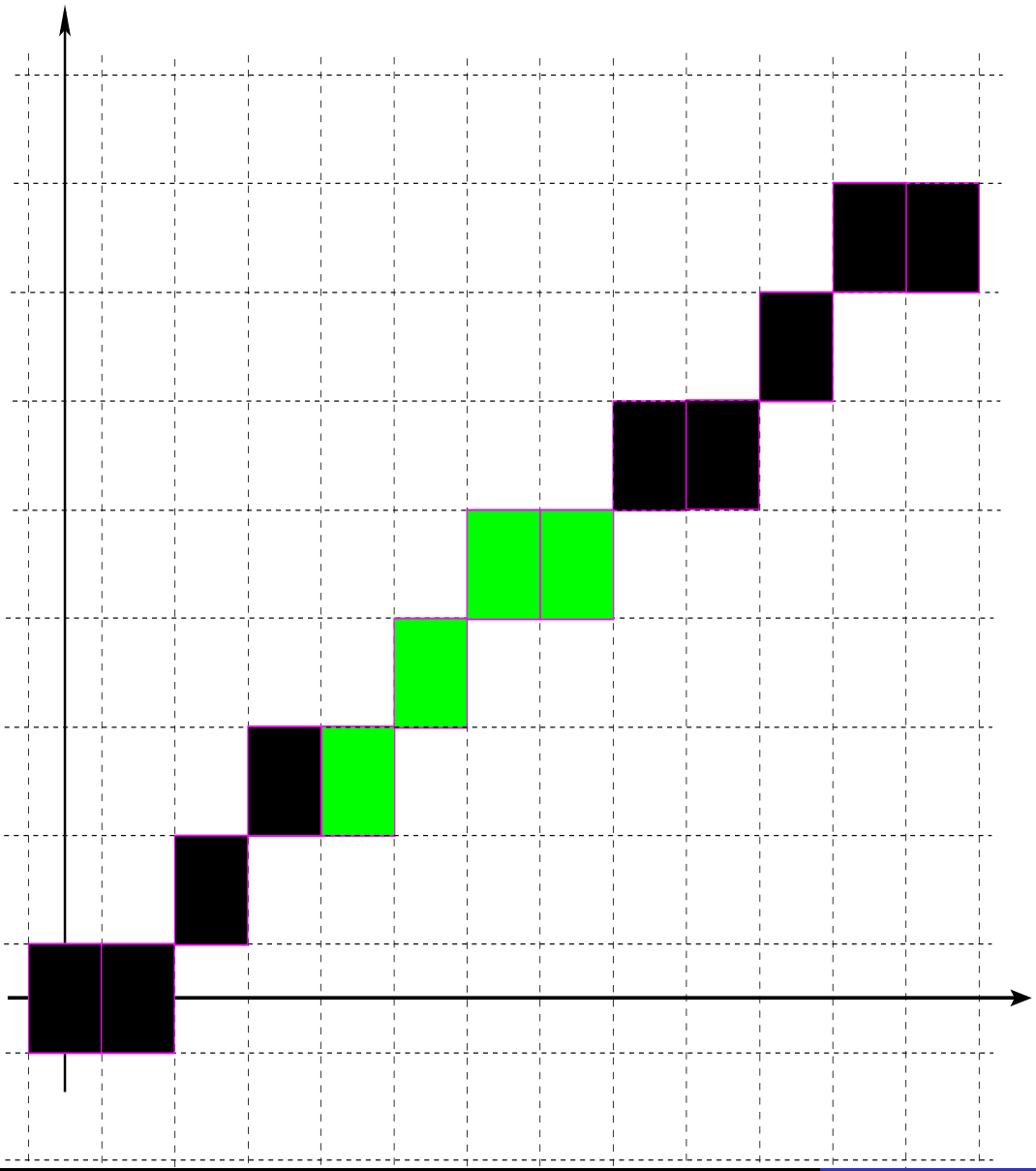


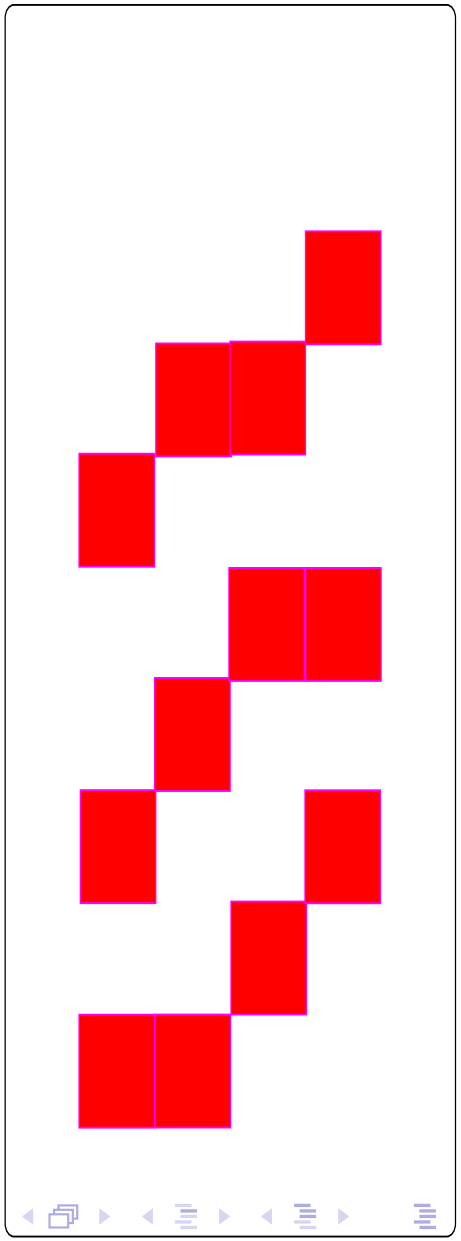


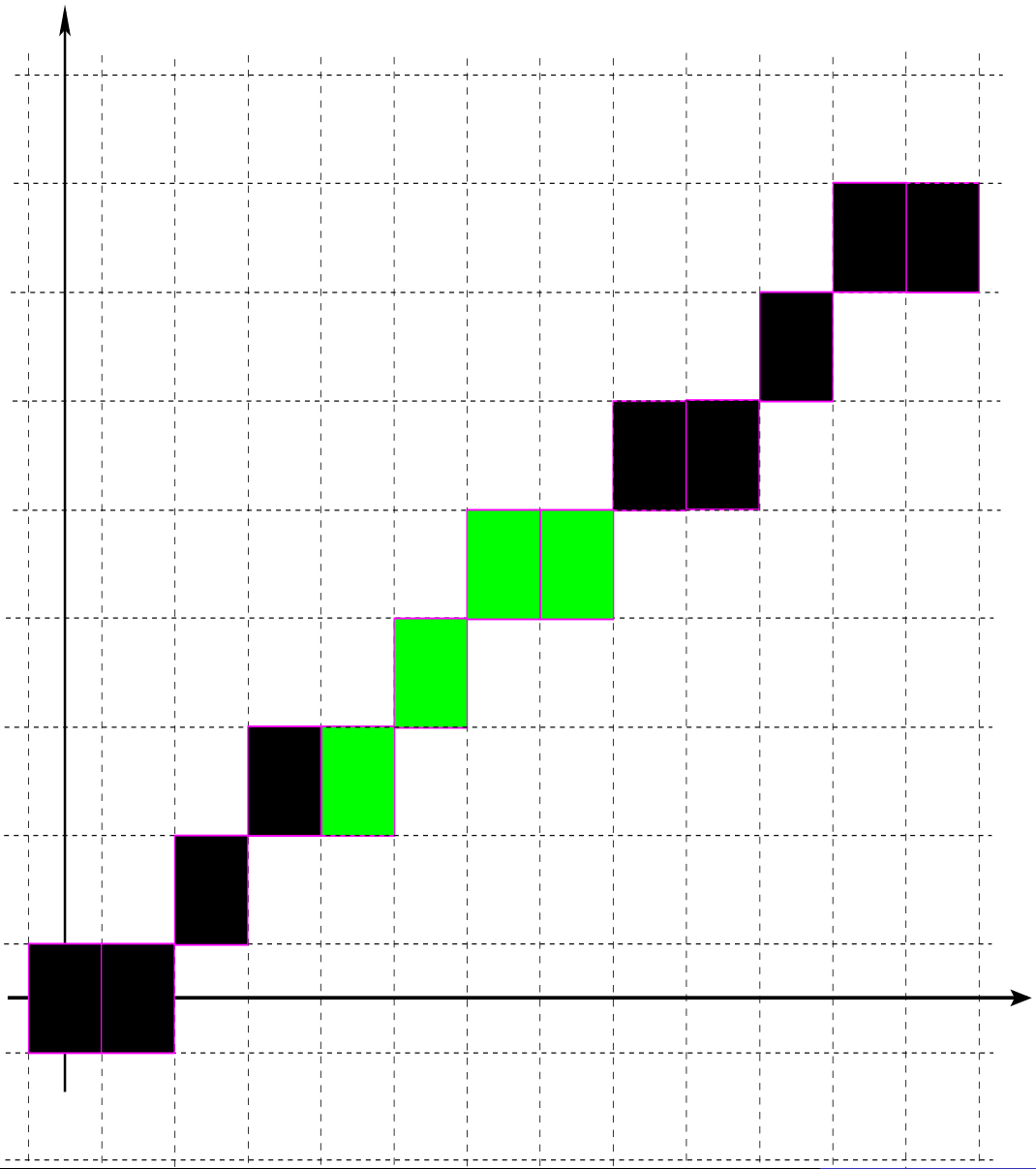


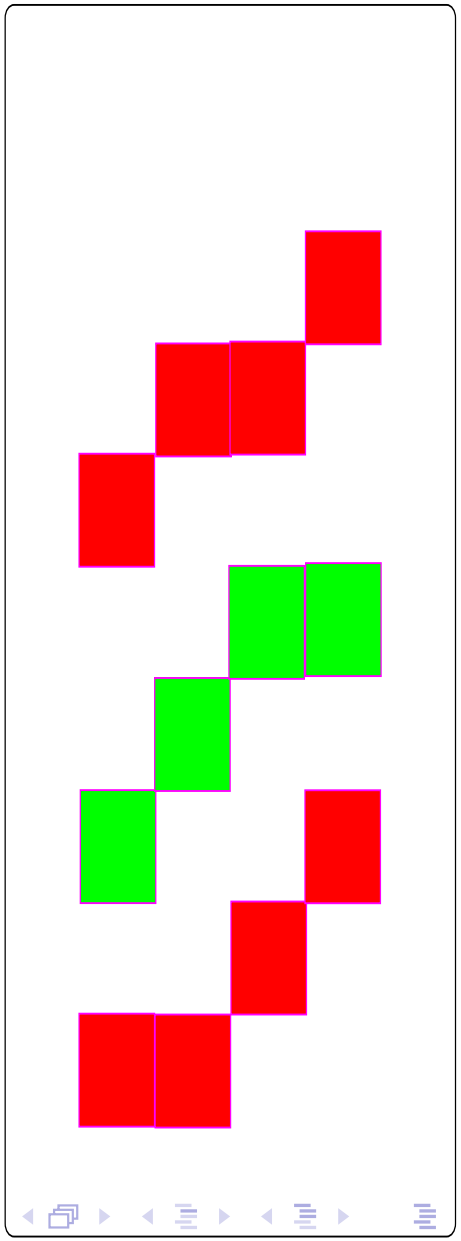


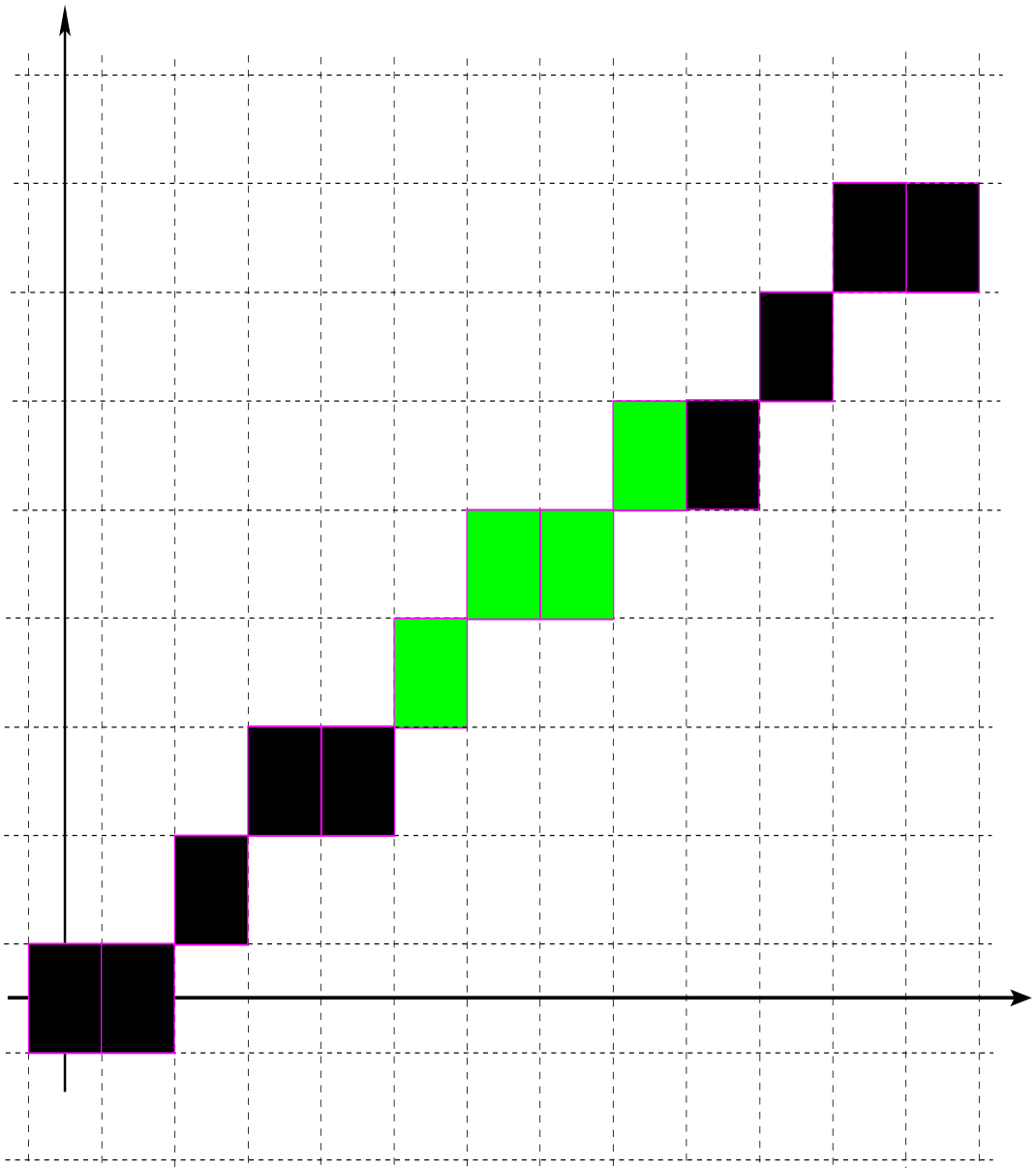


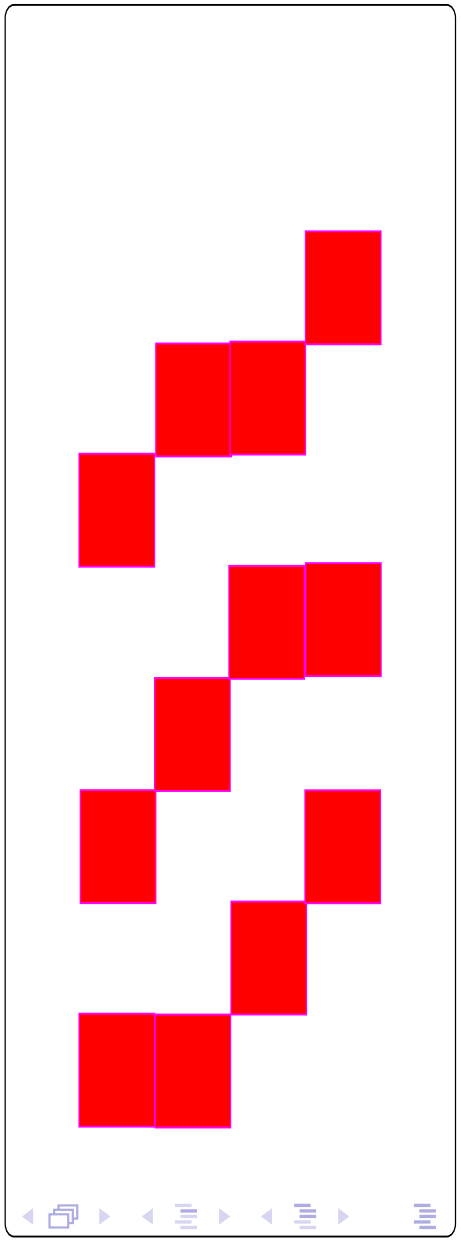


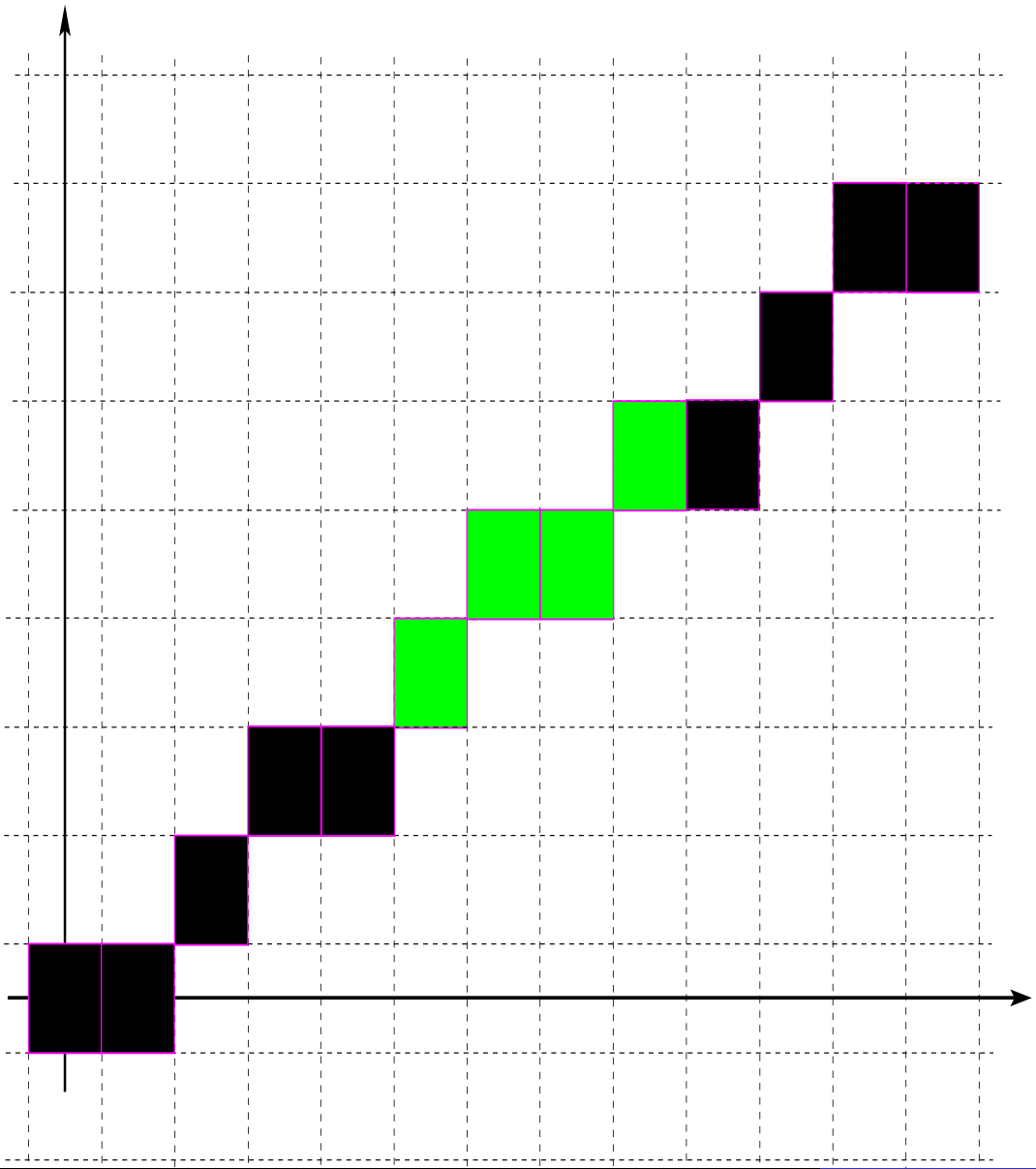


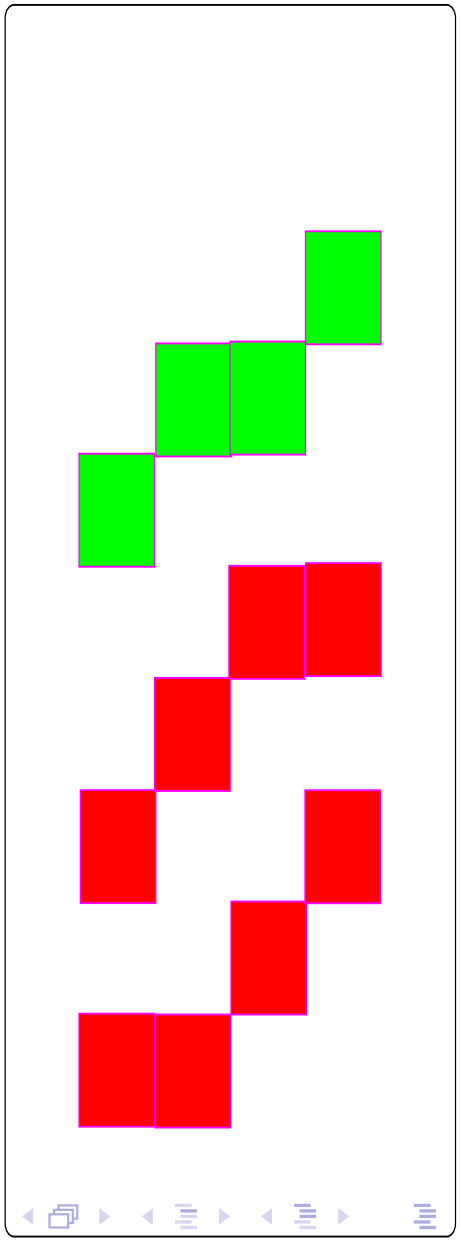


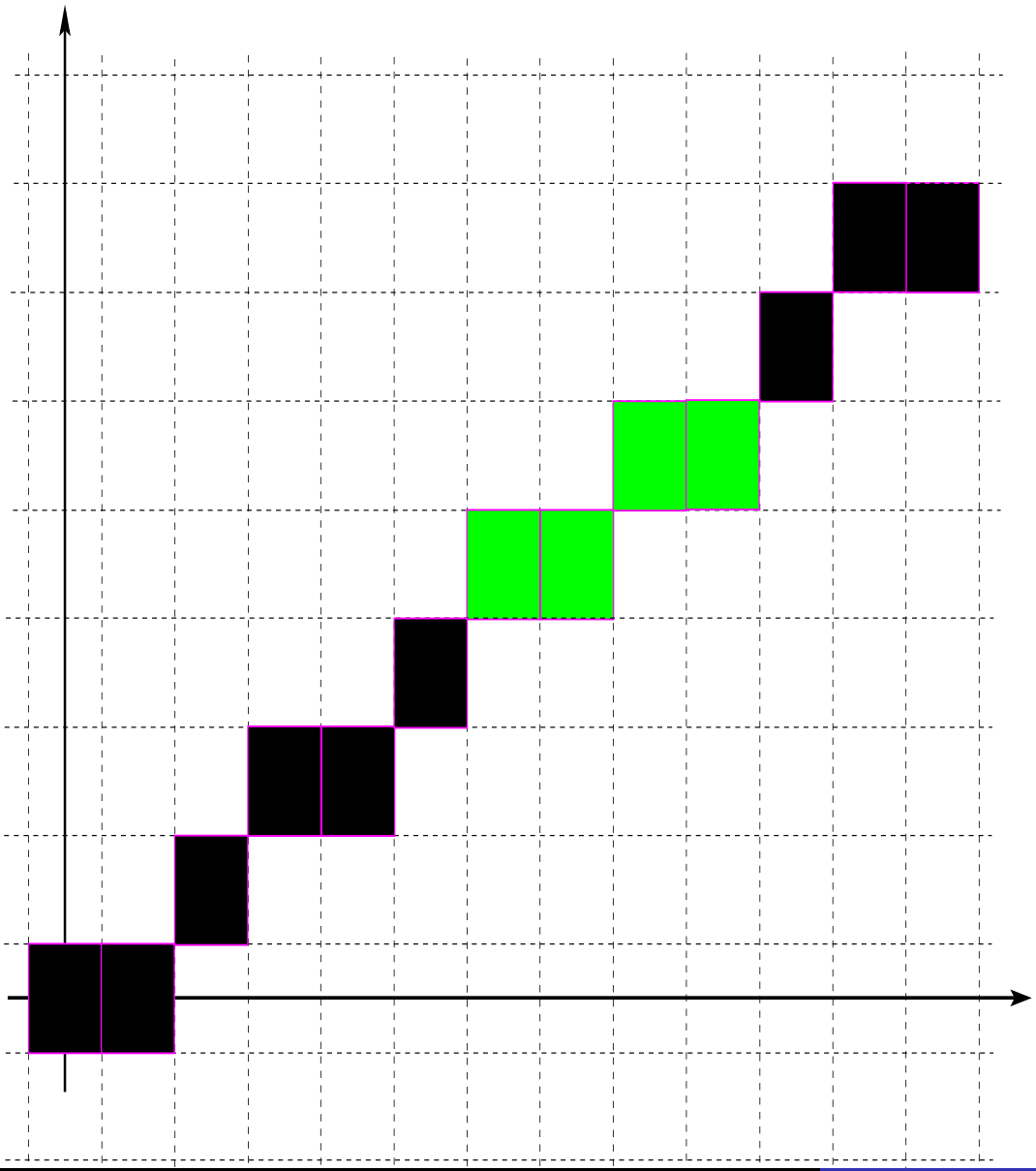


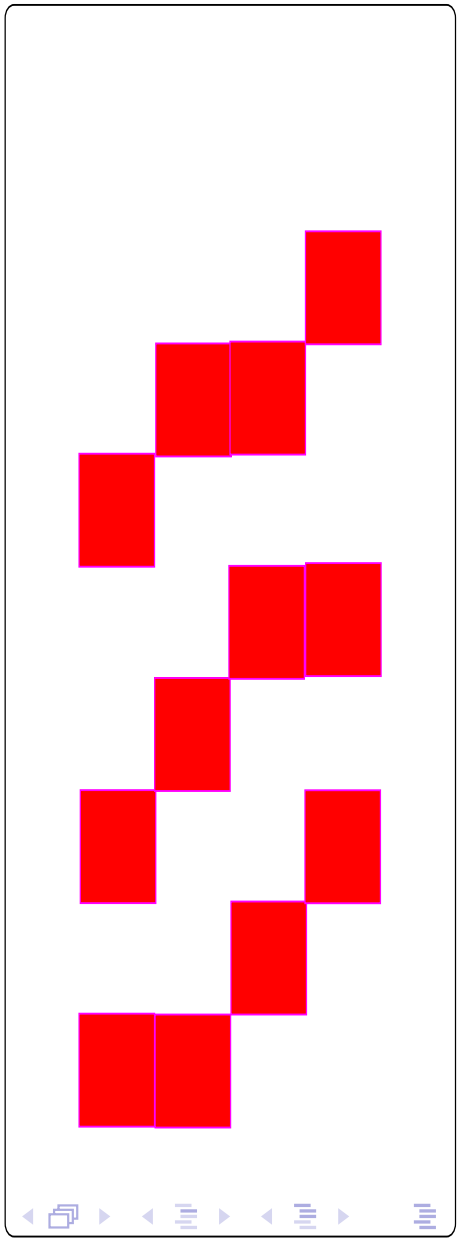


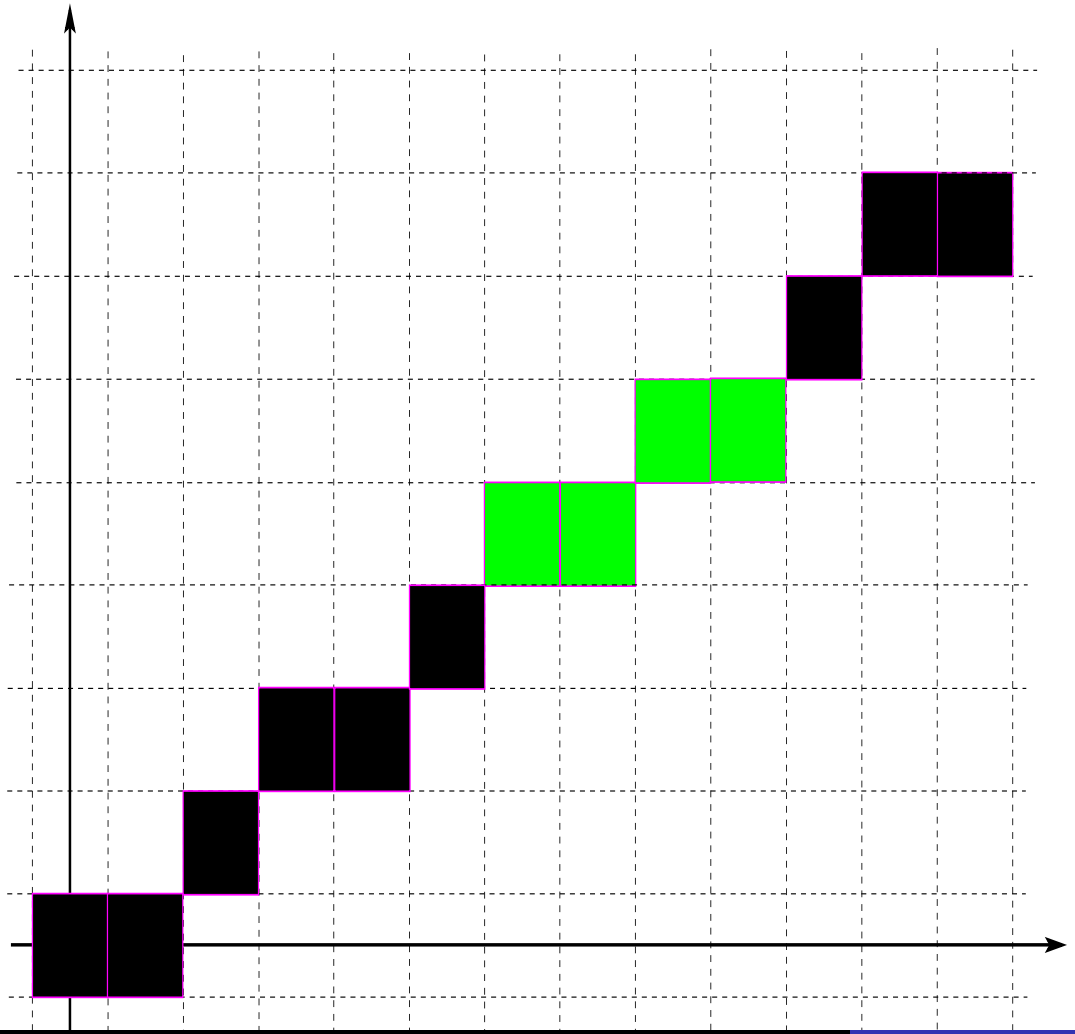


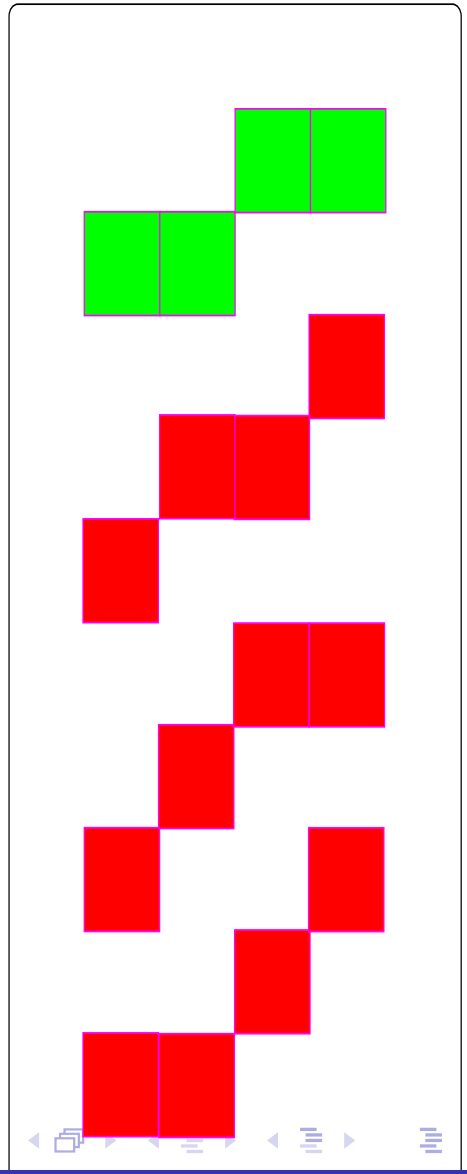


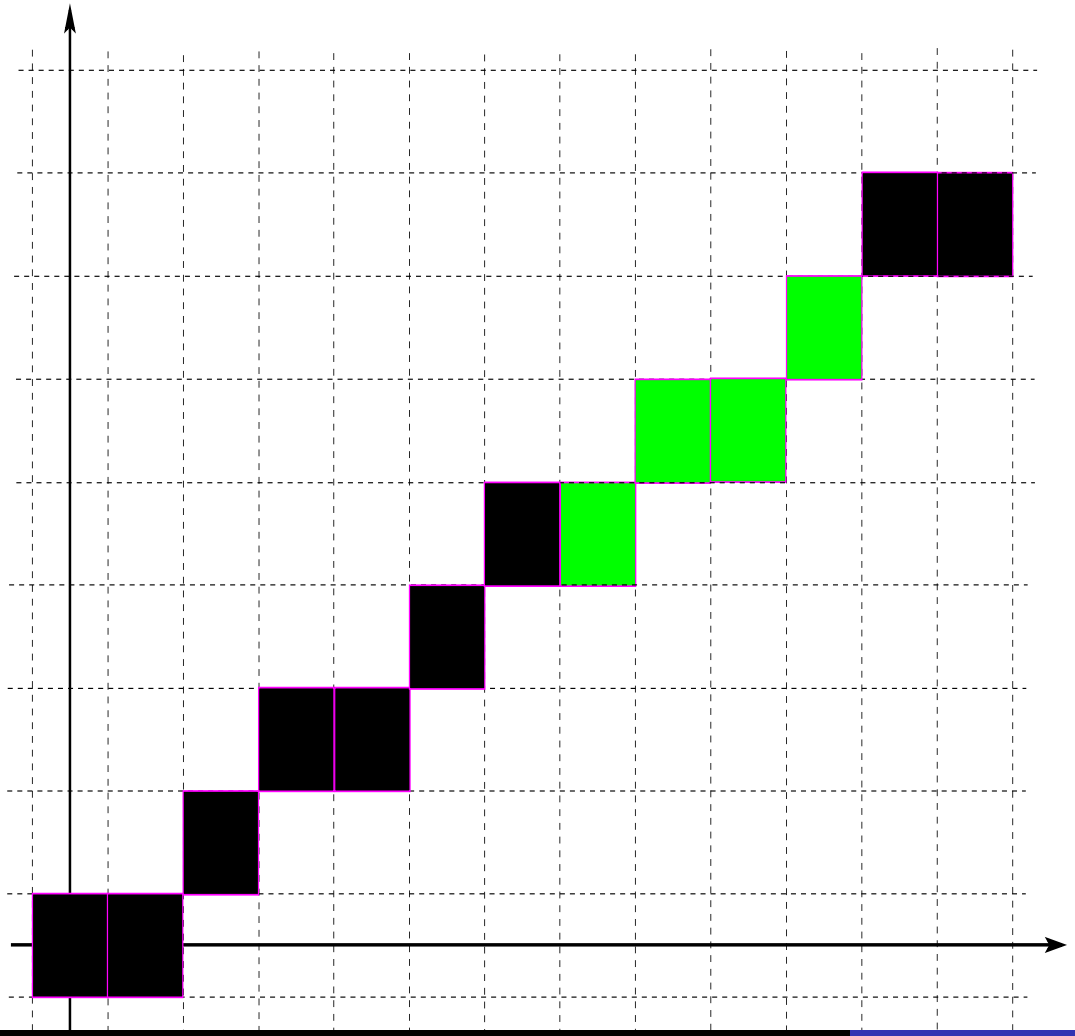


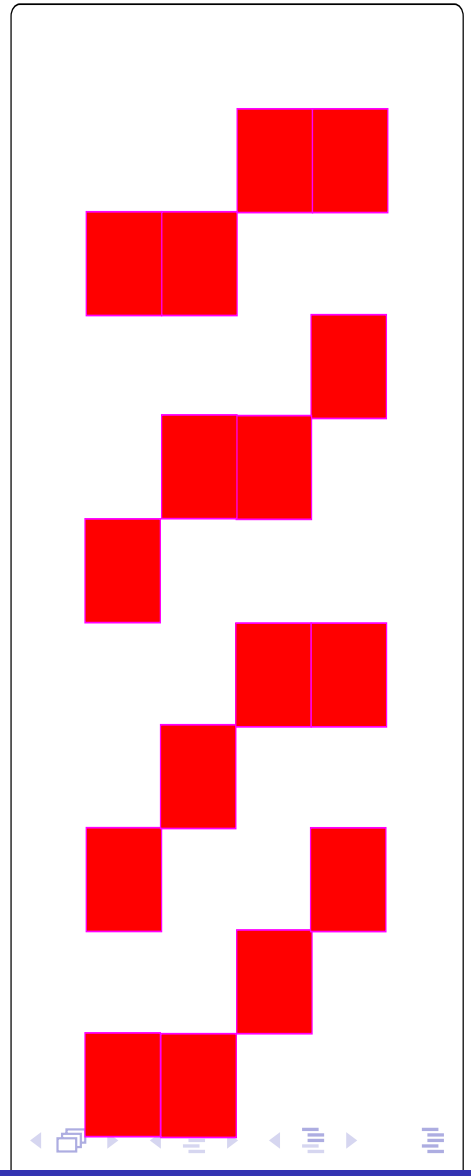


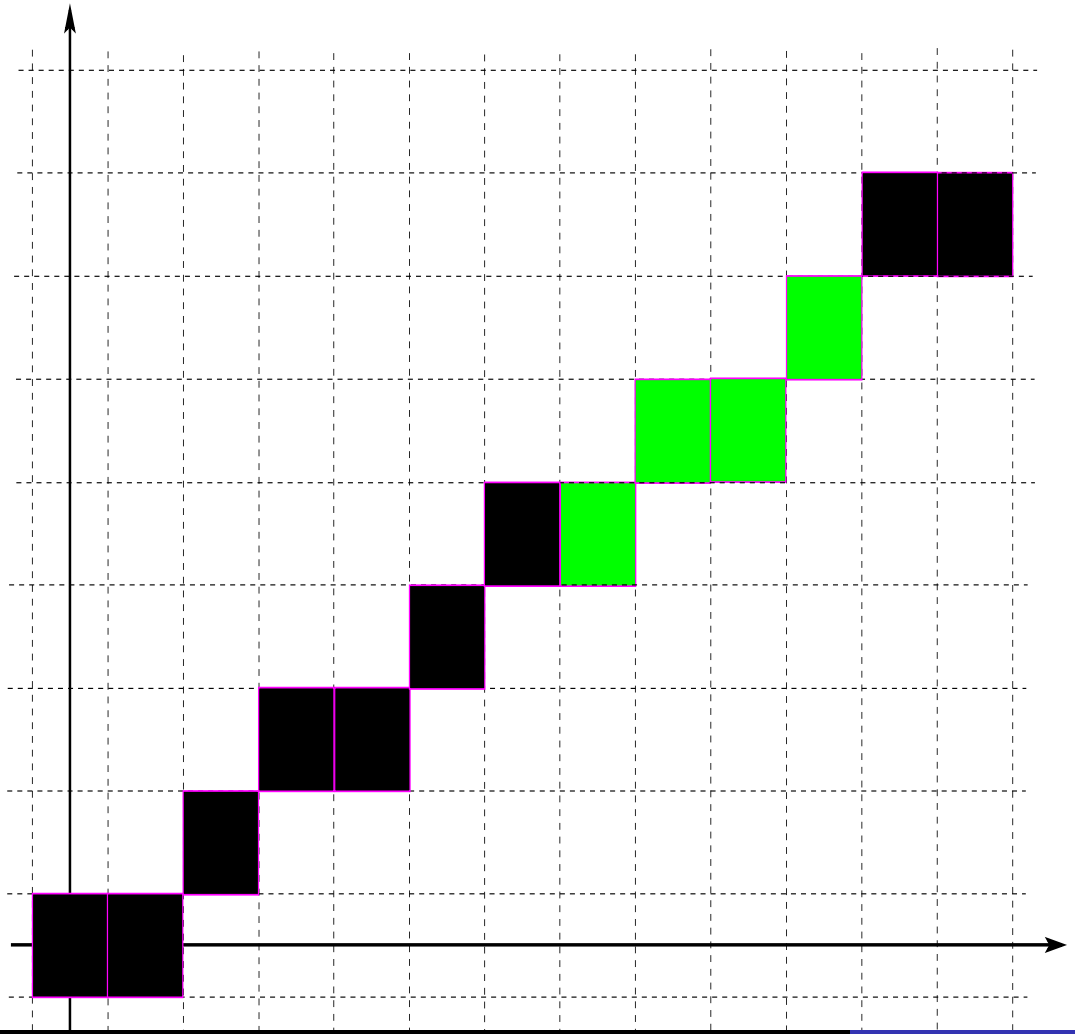


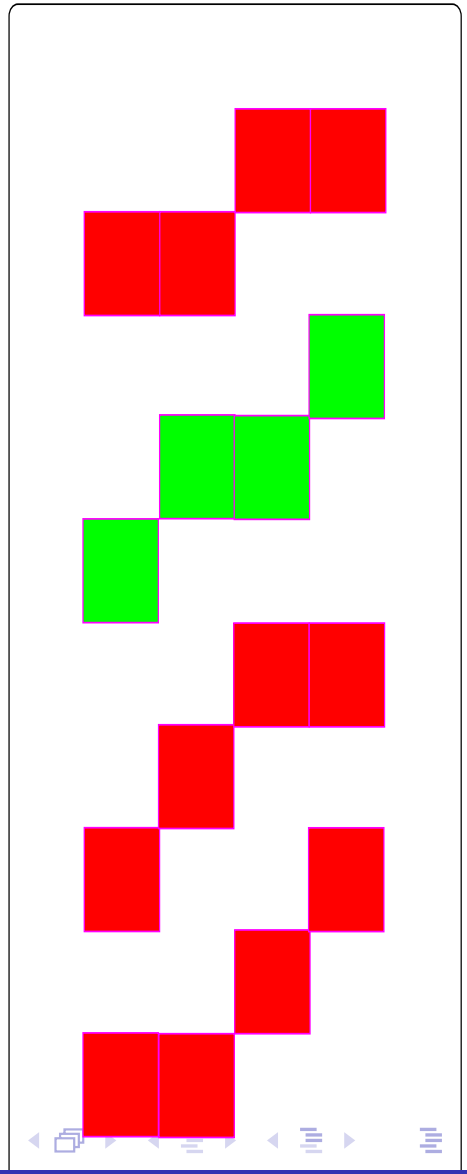


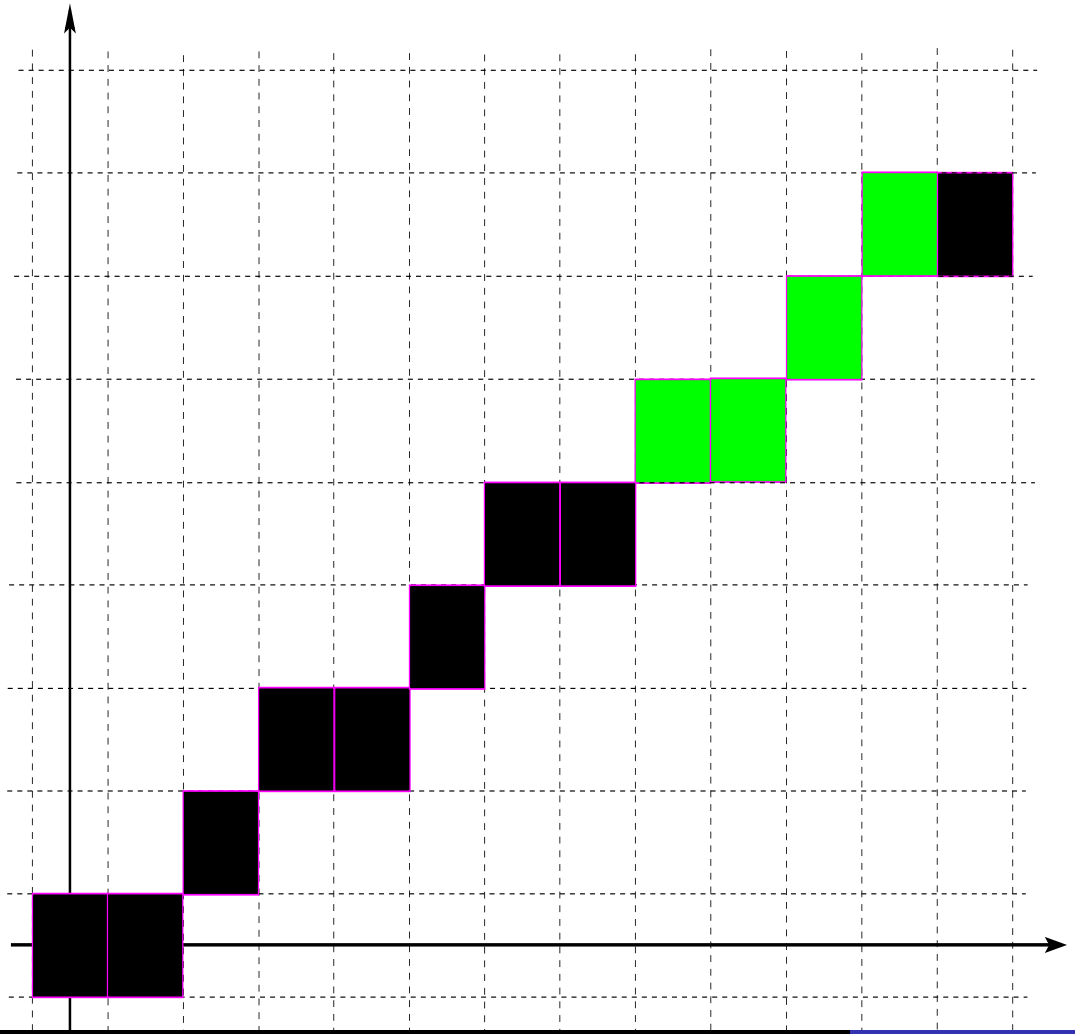


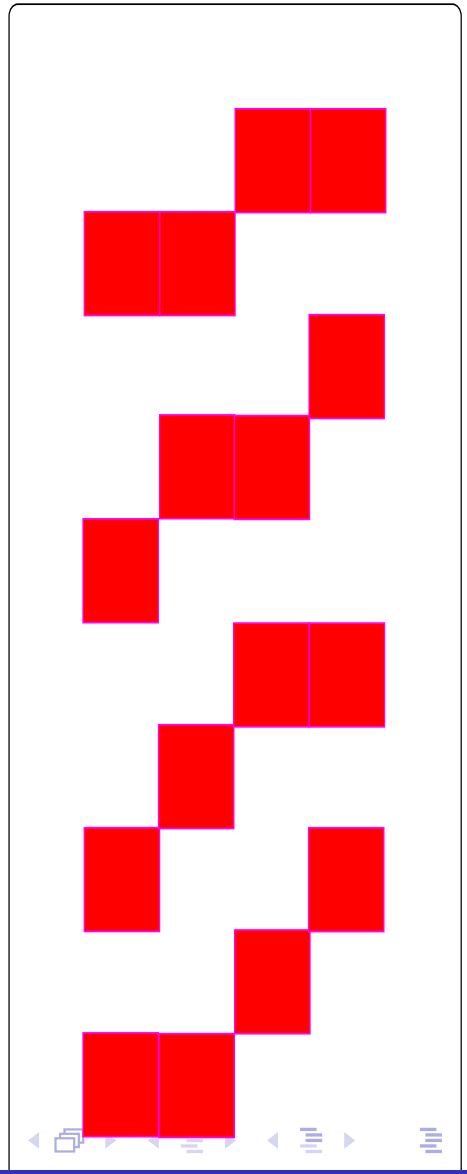


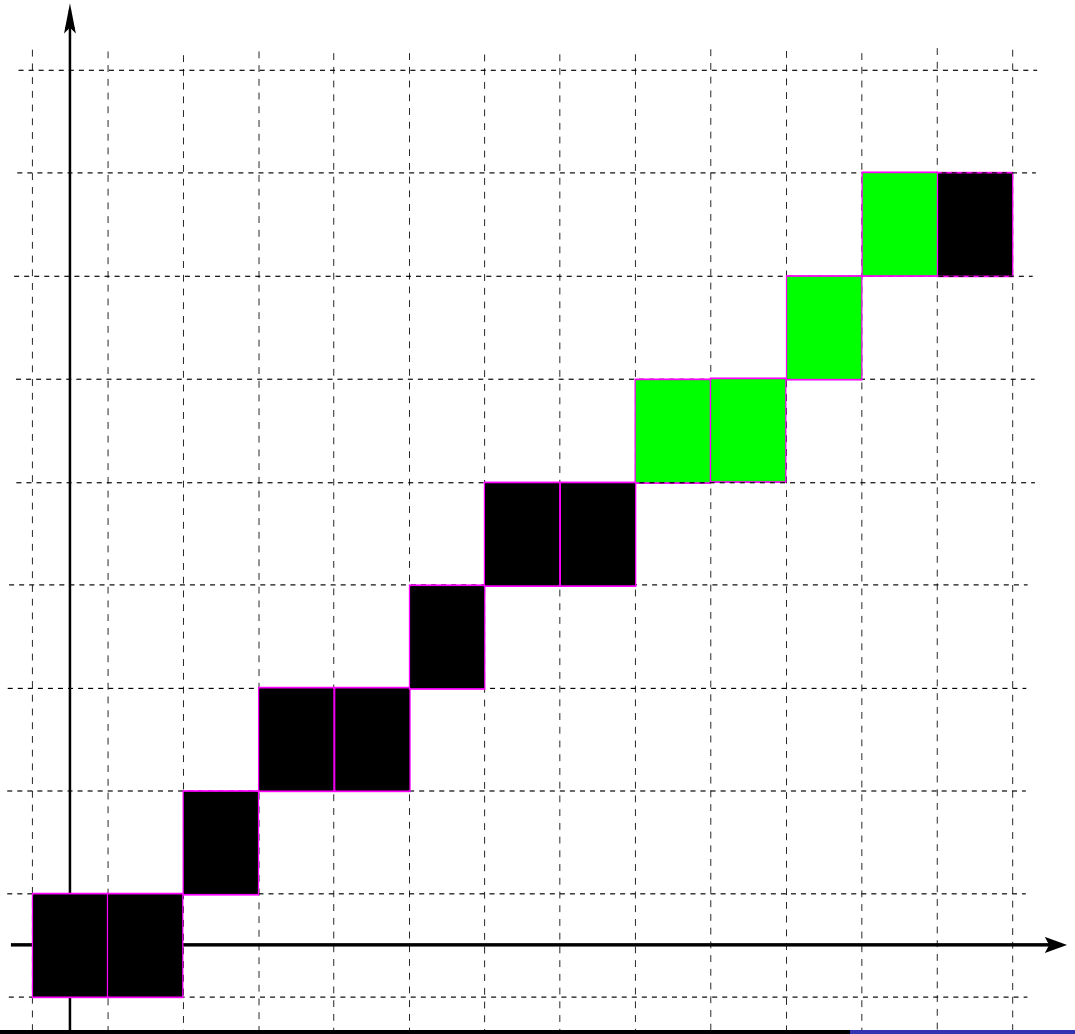


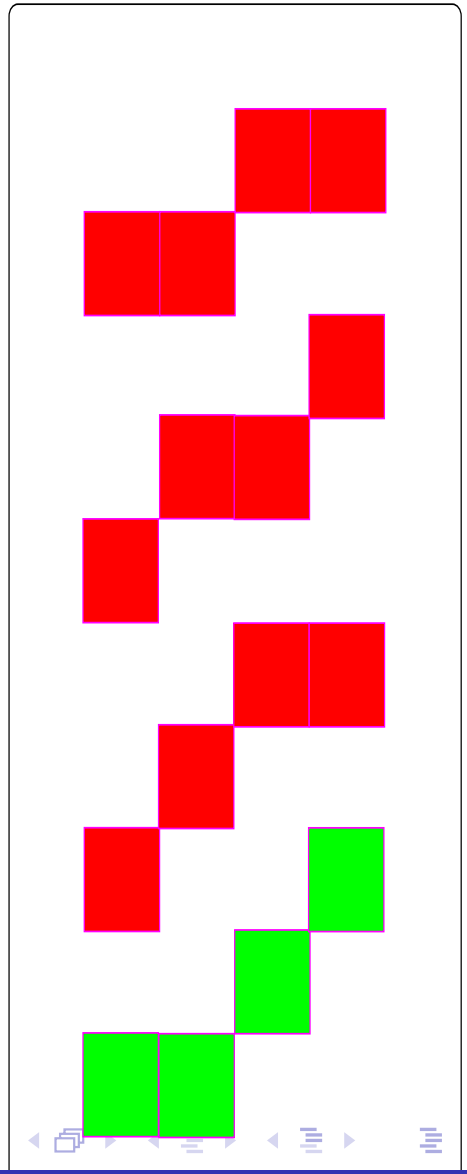


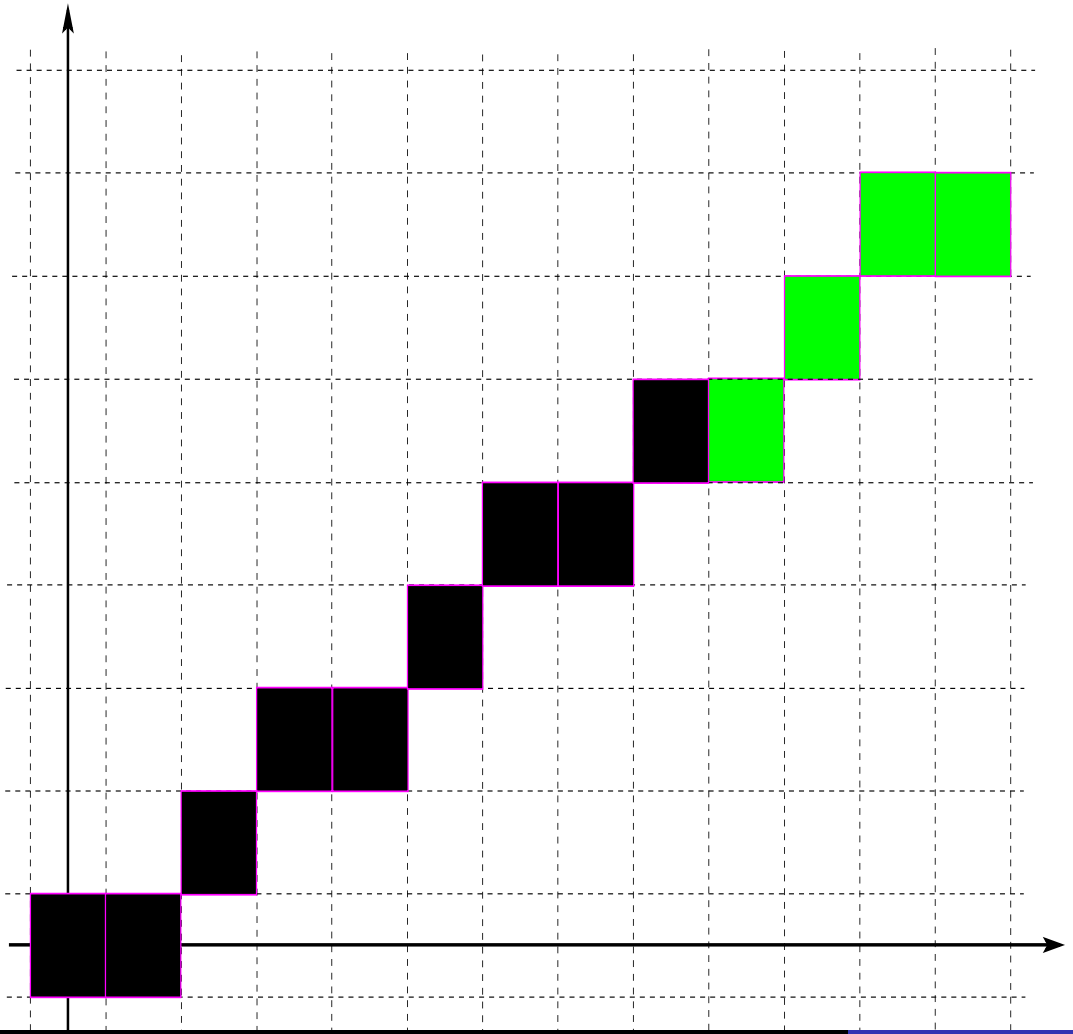


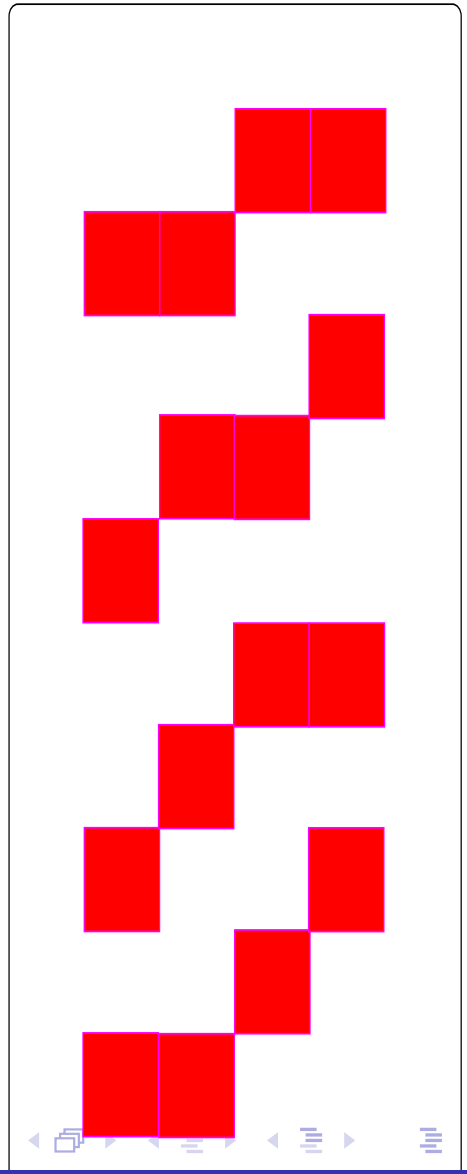


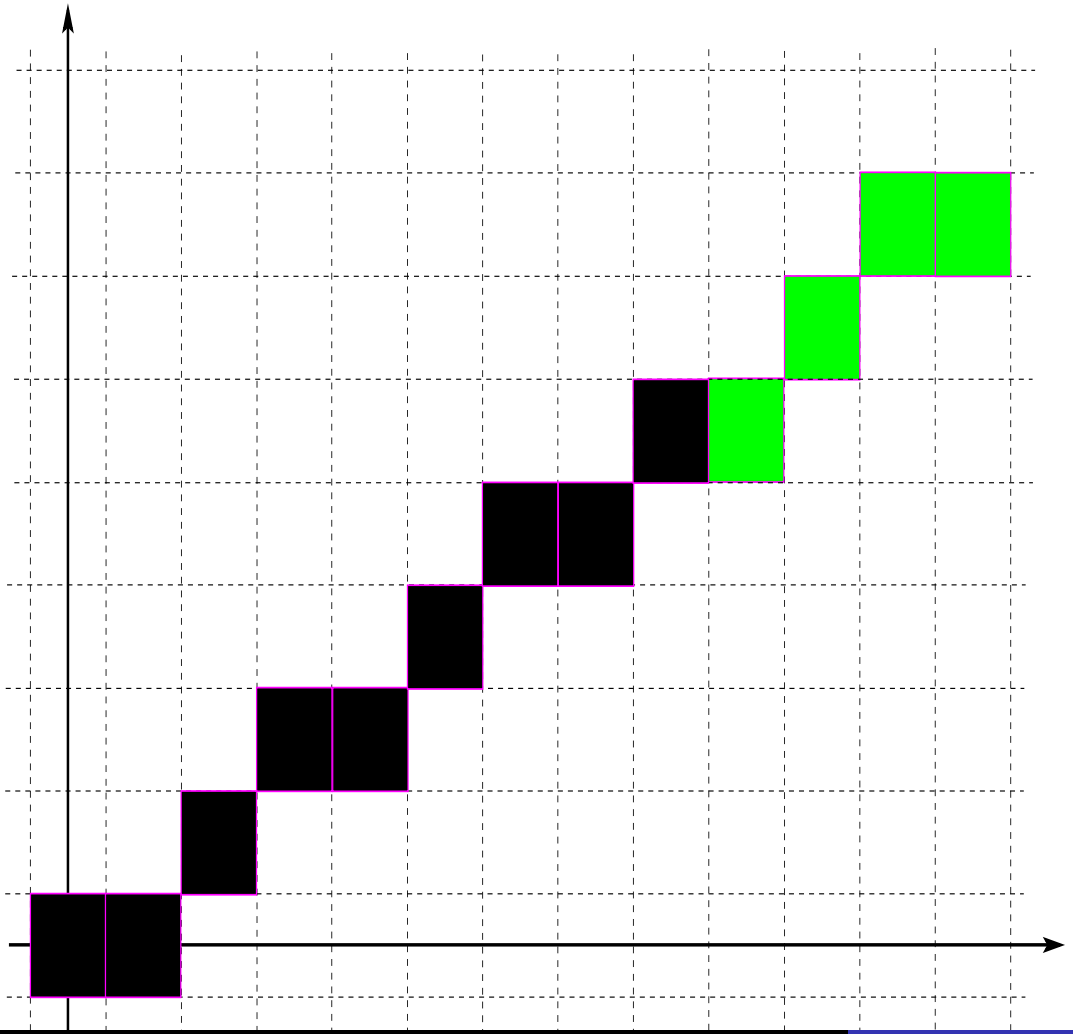


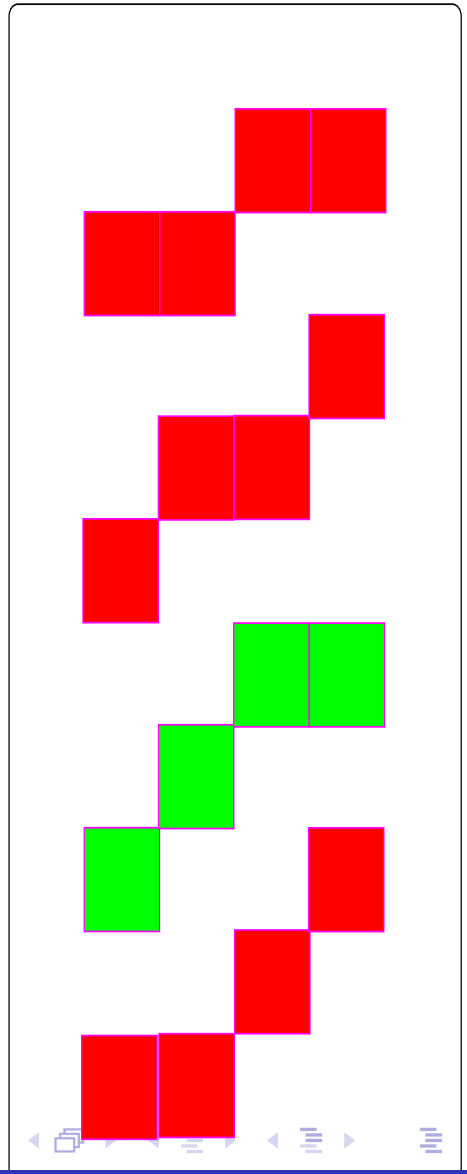


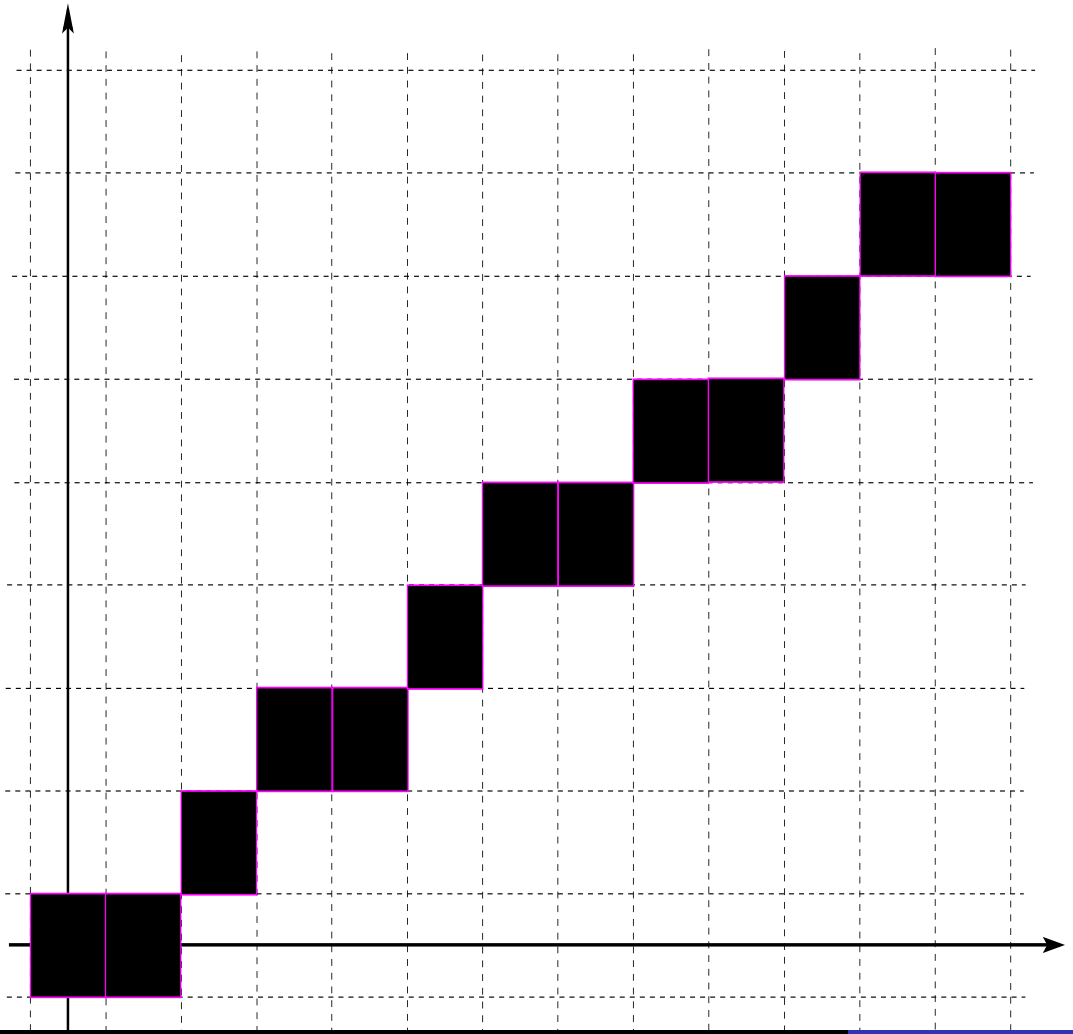


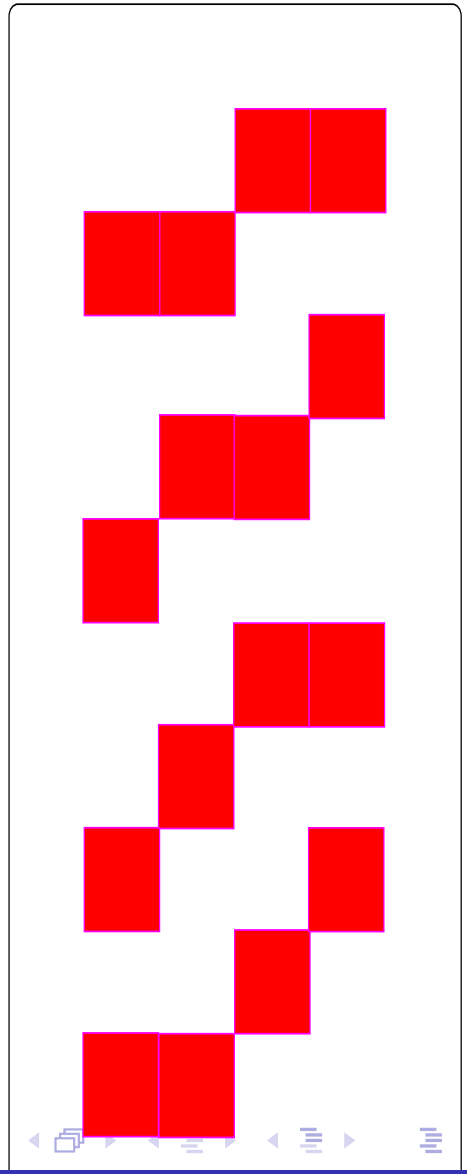


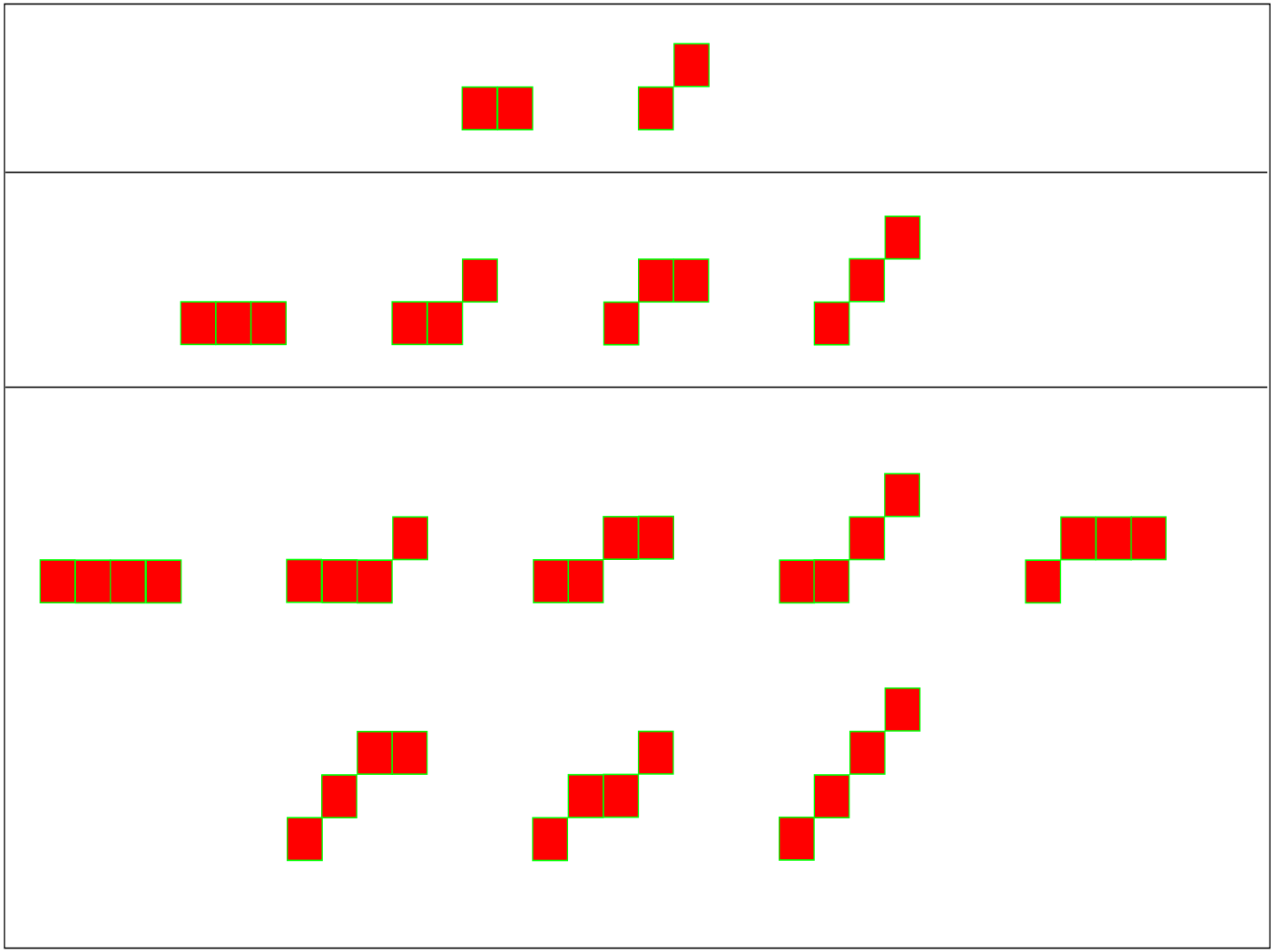












Segments discrets de tailles 1, 2 et 3 :$\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ et $\mathfrak{S}_3$.

Notation

Considérons la suite sequence $(B_k^\alpha)_{0\leq k\leq m}$ comme la suite $(1-\langle \alpha k\rangle)_{0\leq k\leq m}$ réordonnée d'une façon croissante *(On a :* $B_m^\alpha = 1-0\alpha = 1$*)* et posons par convention $B_{-1}^\alpha = 0$.

Propriétés

Soient $\alpha, \beta \in [0,1]$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$.

1. Soit $k \in [\![0, m]\!]$. Alors $S'(m,n,\alpha,\beta)(k) = \lfloor \alpha(n+k)+\beta \rfloor - \lfloor \alpha n+\beta \rfloor = \lfloor \alpha k \rfloor$ si $\langle \alpha n+\beta \rangle < 1 - \langle \alpha k \rangle$, $\lfloor \alpha k \rfloor + 1$ sinon.
2. $S'(m,n,\alpha,\beta)$ dépend seulement de la position du nombre $\langle \alpha n+\beta \rangle$ relativement aux termes de la suite croissante $(B_k^\alpha)_{-1 \le k \le m}$. Par conséquent, pour $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, $S'(m,n_1,\alpha,\beta) = S'(m,n_2,\alpha,\beta) \iff \exists i \in [\![-1, m-1]\!]$ tel que $\langle \alpha n_1+\beta \rangle, \langle \alpha n_2+\beta \rangle \in [B_i^\alpha, B_{i+1}^\alpha)$.
3. Soit $p = (p_x, p_y)$ le début du segment digital $S(m,n,\alpha,\beta)$. Alors, en translatant $\mathfrak{D}(\alpha,\beta)$ par le vecteur $-p$, on obtient $\mathfrak{D}(\alpha, \alpha p_x + \beta - p_y)$ et donc $S'(m,n,\alpha,\beta) = S(m,0,\alpha,\beta')$ et $S(m,0,\alpha,\beta')$ a comme début le point $(0,0)$.

Définition (Nombres de Farey)

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathcal{F}_m = \{\frac{p}{q} \mid 0 \leq p \leq q,\ 0 < q \leq m \text{ et } pgcd(p,q) = 1\}$ est appelé l'ensemble des nombres de Farey d'ordre m. Les éléments de $\mathcal{F}_m$ sont appelés les nombres m-Farey.

Par exemples, $\mathcal{F}_4 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\}$.

Les nombres m-Farey ont plusieurs propriétés, par exemple, si $f < f'$ et $f = \frac{p}{q}, f' = \frac{p'}{q'}$ sont deux nombres m-Farey consécutifs, alors $p'q - pq' = 1$, $pgcd(p+p', q+q') = 1$, $q + q' > m$ et $\frac{p}{q} < \frac{p+p'}{q+q'} < \frac{p'}{q'}$.

Propriété

Soient $\alpha, \beta \in [0,1]$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour tout $i \in [\![-1, m-1]\!]$, si $B_i^\alpha < B_{i+1}^\alpha$, alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\langle \alpha n + \beta \rangle \in [B_i^\alpha, B_{i+1}^\alpha)$.
2. $\mathrm{card}(\{S'(m,n,\alpha,\beta) \mid m \in \mathbb{Z}\}) = \mathrm{card}(\{i \mid -1 \leq i < m \text{ and } B_i^\alpha < B_{i+1}^\alpha\}) \leq m+1$.
3. Soient $\frac{p}{q} \in \mathcal{F}_m$ avec $0 \leq p \leq q$ et p, q sont premiers entre eux. Alors, $\mathrm{card}(\{S'(m,n,\alpha,\beta) \mid m \in \mathbb{Z}\}) = q$.
4. Si $\alpha \in ([0,1] \setminus \mathcal{F}_m)$, alors tout les éléments de la suite $(B_k^\alpha)_{-1 \leq k \leq m}$ sont distincts et par conséquent, $\mathrm{card}(\{S'(m,n,\alpha,\beta) \mid n \in \mathbb{Z}\}) = m+1$.

Remarque : Comme la suite $(B_k^\alpha)_{-1\leq k\leq m}$ est indépendante de β, alors la propriété précédente implique que $\mathcal{C}(m,\alpha,\beta)$ est aussi indépendant de β. Dans la suite on utilisera la notation $\mathcal{C}(m,\alpha)$ au lieu de $\mathcal{C}(m,\alpha,\beta)$.

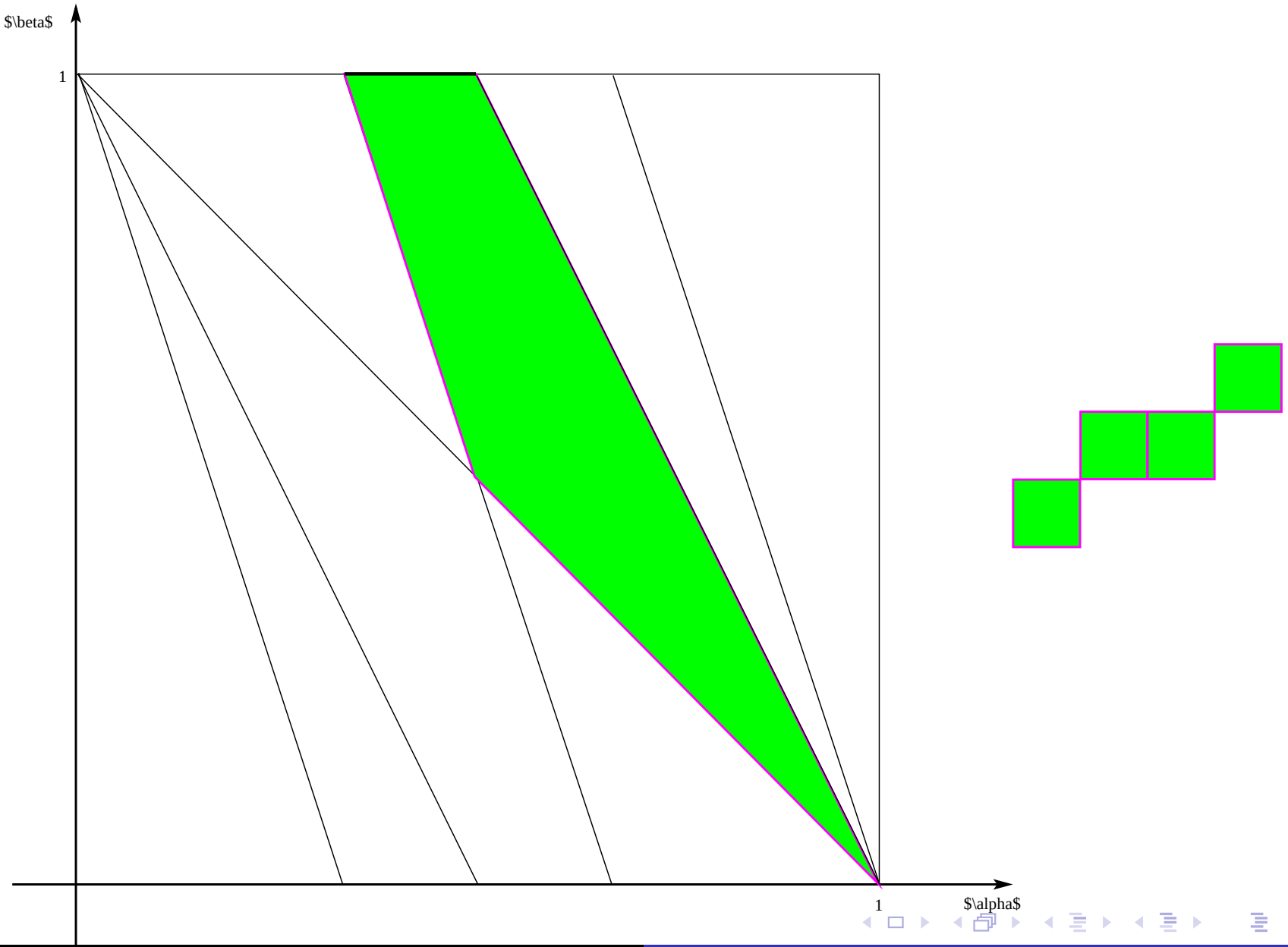
Définition

Soit $S \in \mathfrak{S}_m$. $\mathcal{I}m(S) = \{(\alpha, \beta) \in [0,1]^2 \mid S = S(m, 0, \alpha, \beta)\}$ est appelé la pré-image du segment discret S.

Propriété

Soit $S \in \mathfrak{S}_m$. Alors, $\mathcal{I}m(S)$ est un polygone convexe de $\mathbb{R}^2$.

Preuve : Soit $S \in \mathfrak{S}_m$. Alors
$\mathcal{I}m(S) = \{(\alpha, \beta) \in [0,1]^2 \mid 0 \leq \alpha x + \beta - y < 1 \text{ pour } (x, y) \in S\}$.
Par conséquent, $\mathcal{I}m(S)$ est un polygone convexe.


β
1
1
α

Outline

1. Mots de Stum et droite discrète
   - Utilisations des droites et des ségments discrets en analyse d'image
2. Segment discret
   - Nombres de Farey
   - Pré-Image d'un segment discret
3. Fréquences de segments discret
   - Définitions et propriétés des fréquences
   - Propriétés des fréquences et combinatoire des mots de Sturm
   - Propriété des 3 intervalles
   - Dénombrement des mots de Sturm

Soient $\alpha, \beta \in [0,1]$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Définition :

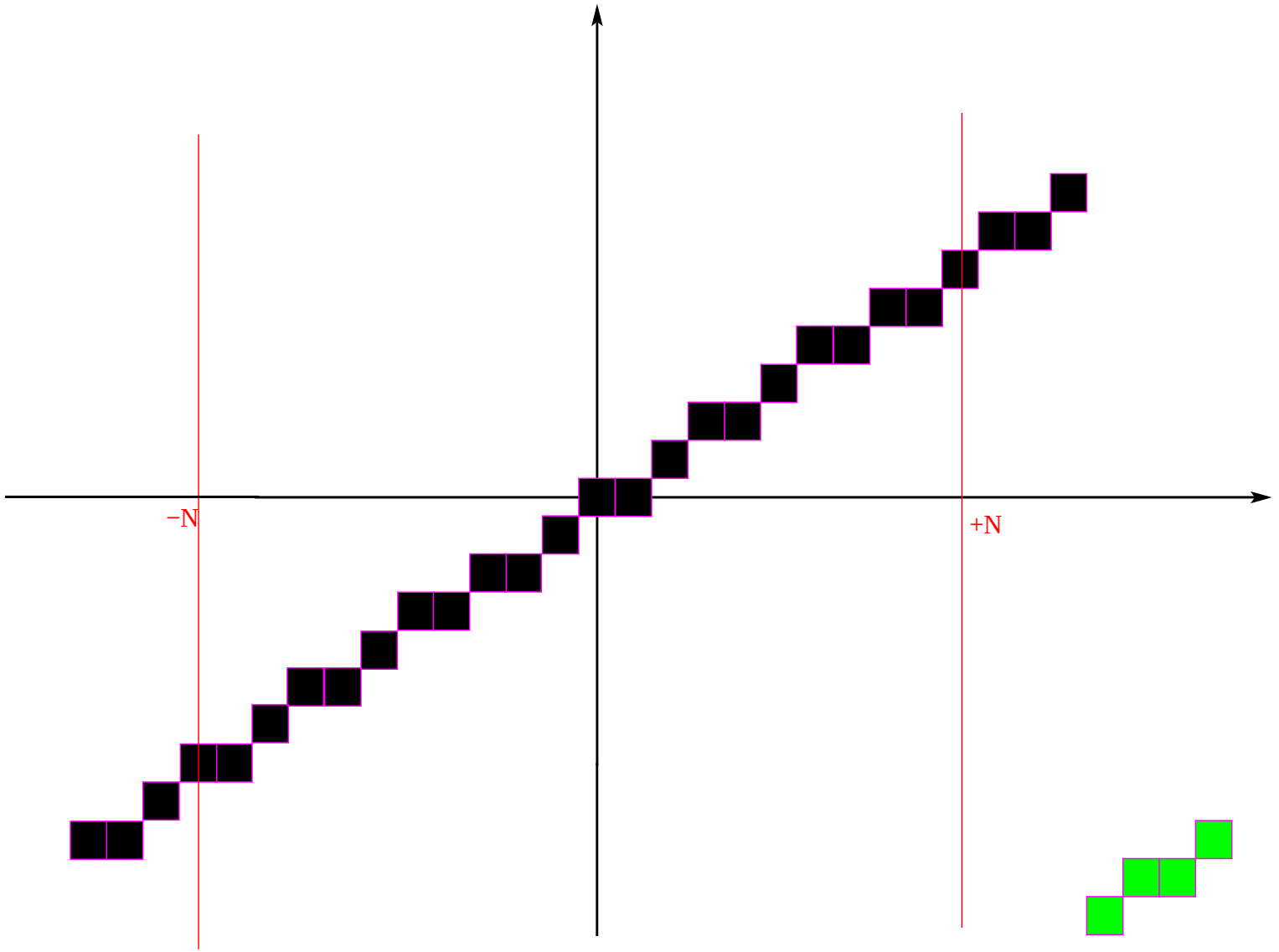
La β-fréquence d'un segment discret S pour la pente α (notée $\mathrm{freq}_\alpha(S)$) est la longueur de l'intervalle $I^\alpha(S) = \{\beta \in [0,1] \mid (\alpha, \beta) \in \mathcal{I}m(S)\}$.

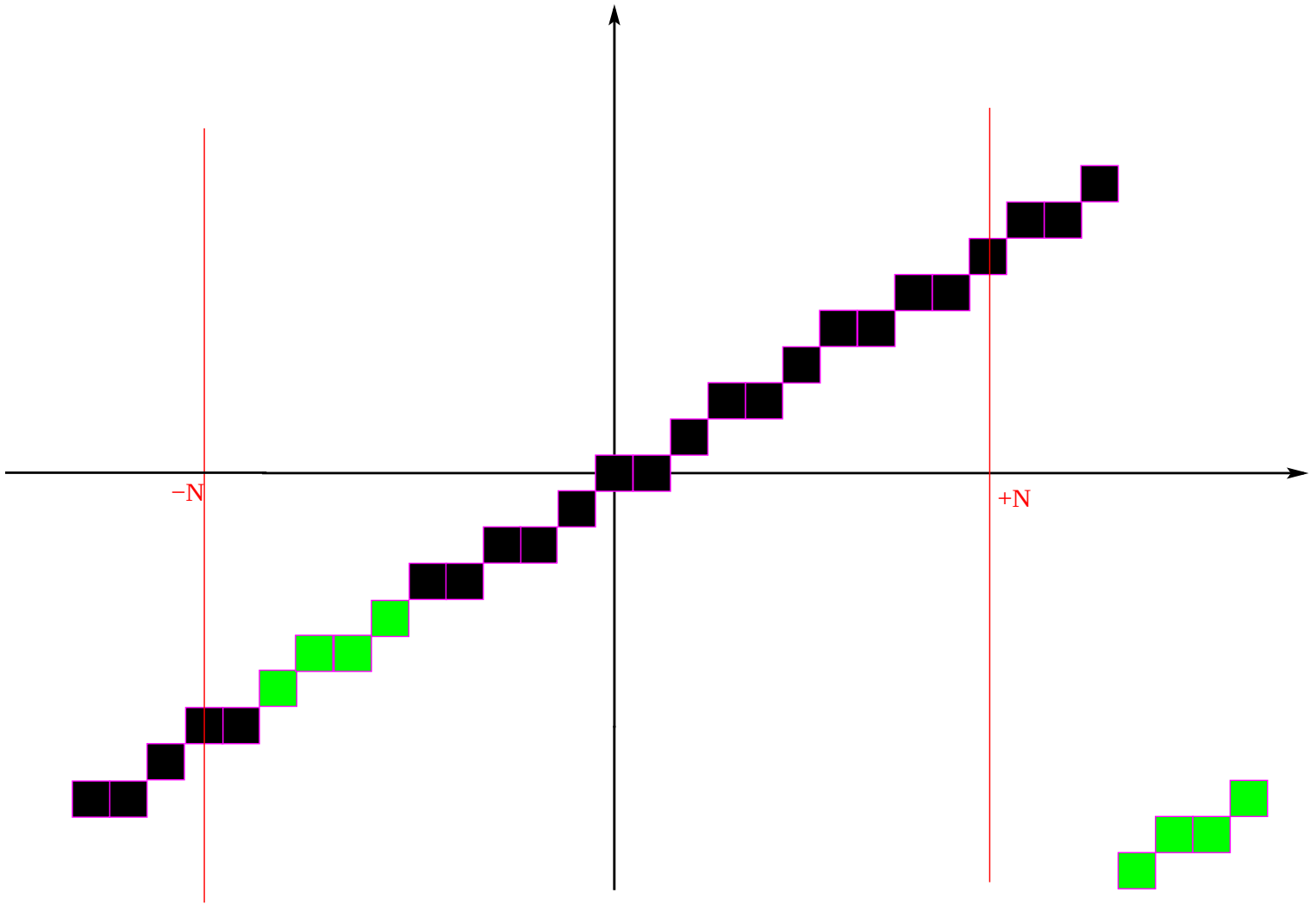
Définition (Propriété) :

La fréquence de chauvechement du segment discret S dans la droite discrète $\mathfrak{D}(\alpha, \beta)$ est

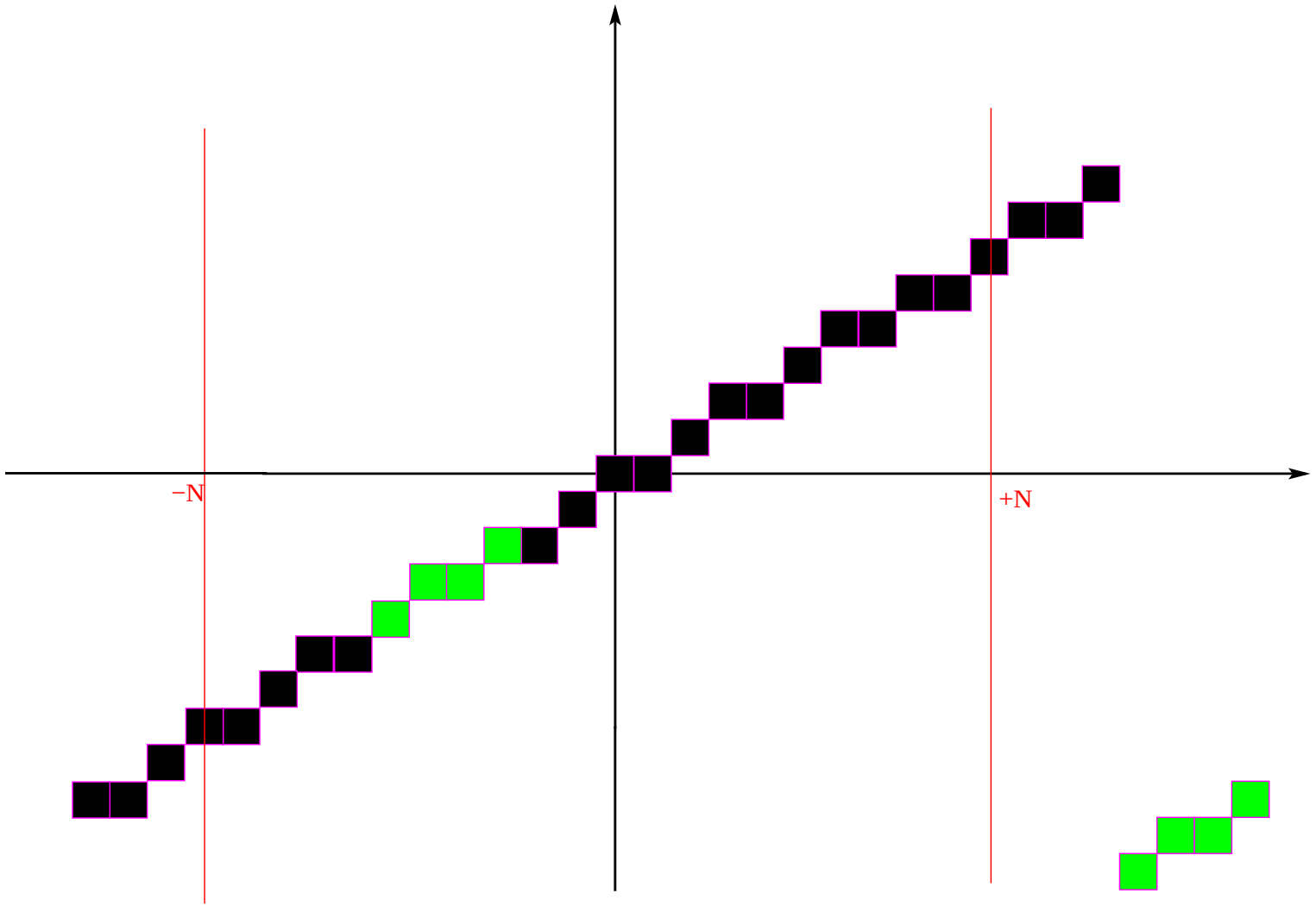
$$\mathrm{overfreq}_{\alpha,\beta}(S) =^{\star} \lim_{N \to +\infty} \frac{\mathrm{card}(\{n \in [\![-N, N]\!] | S'(m, n, \alpha, \beta) = S\})}{(2N+1)}.$$

Par conséquent,
$\mathrm{overfreq}_{\alpha,\beta}(S) = \lim_{N \to +\infty} \frac{\mathrm{card}(\{n \in [\![-N,N]\!] \mid \langle \alpha n + \beta \rangle \in I^\alpha(S)\})}{(2N+1)}$.

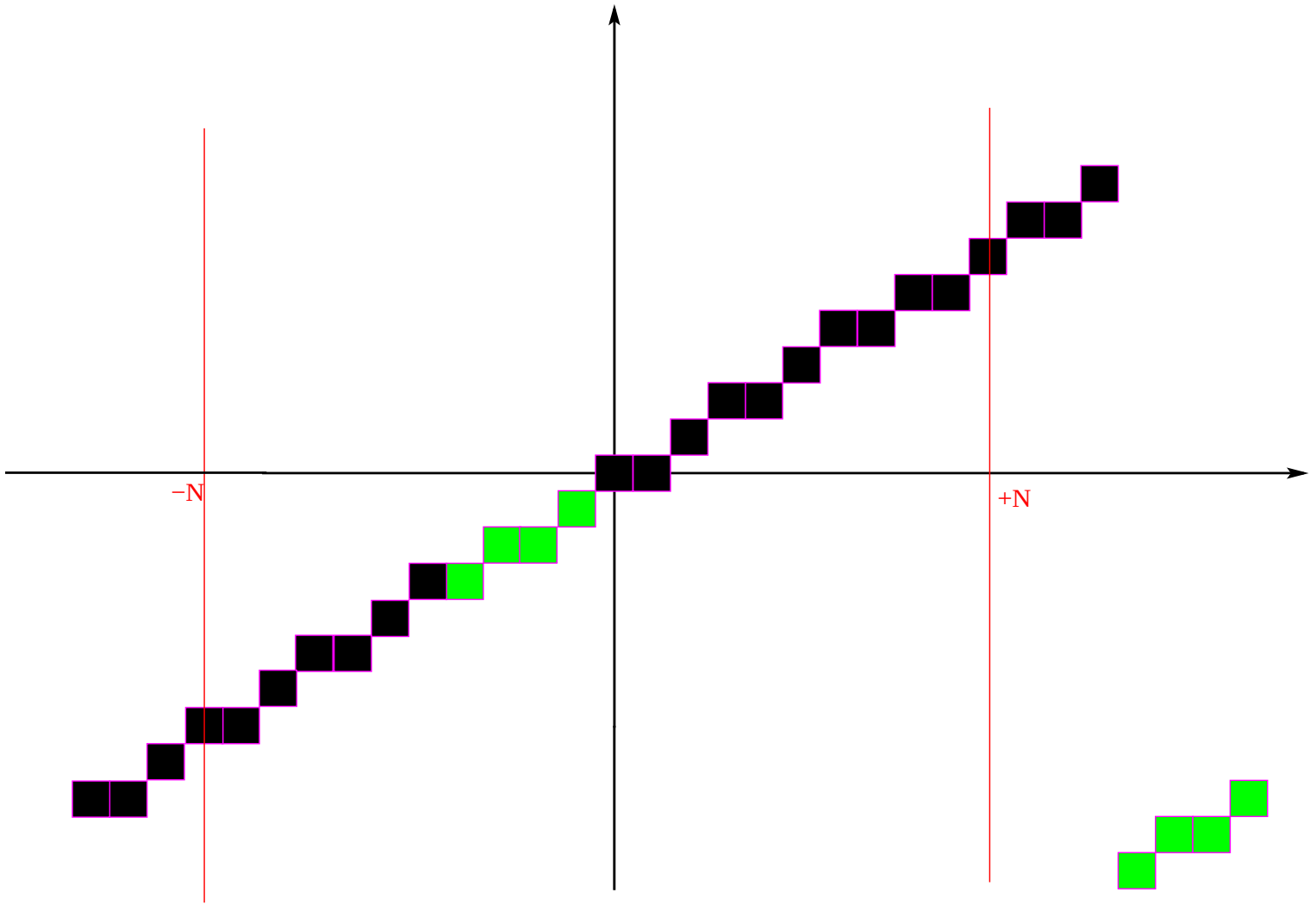

−N
+N



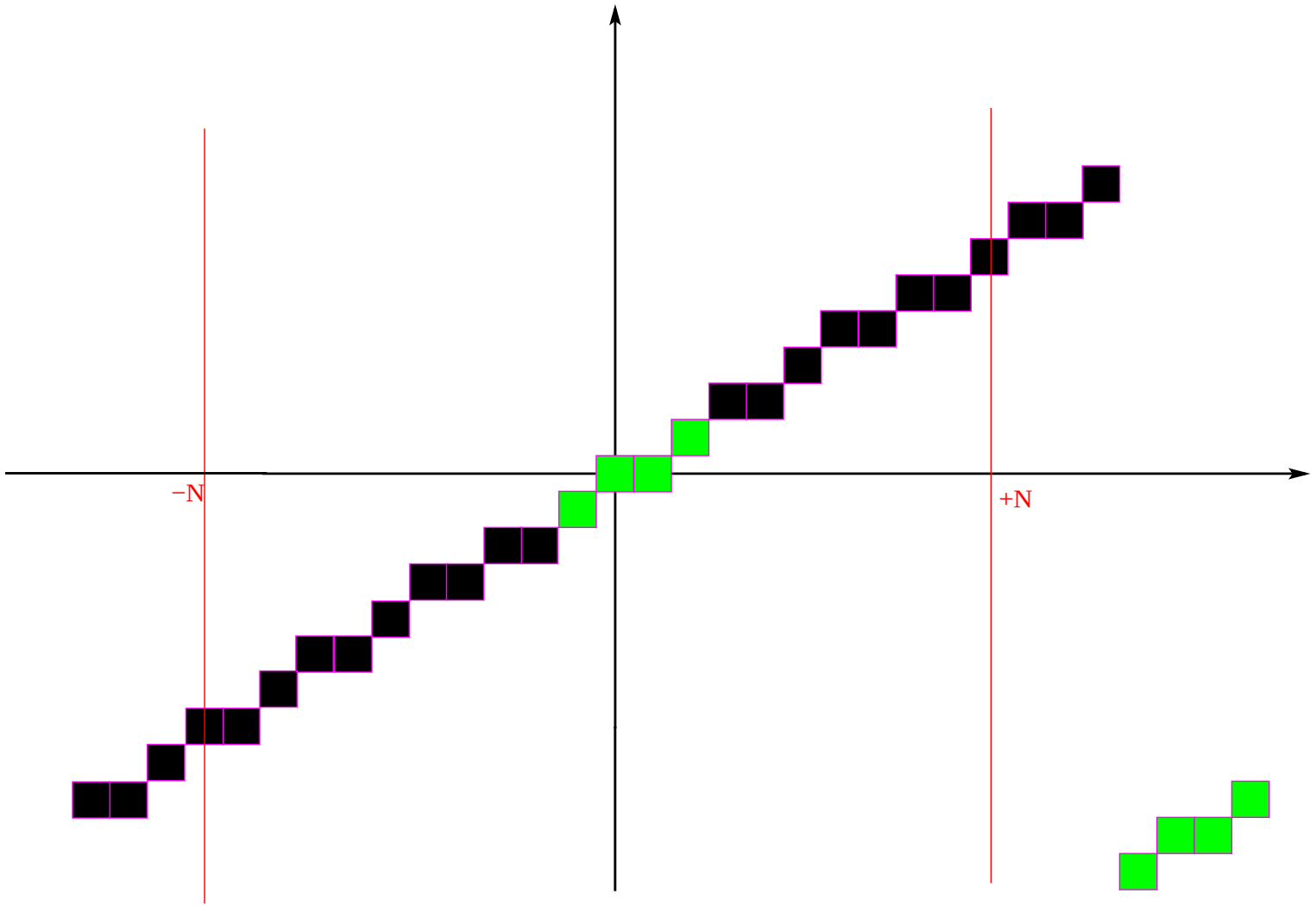
1



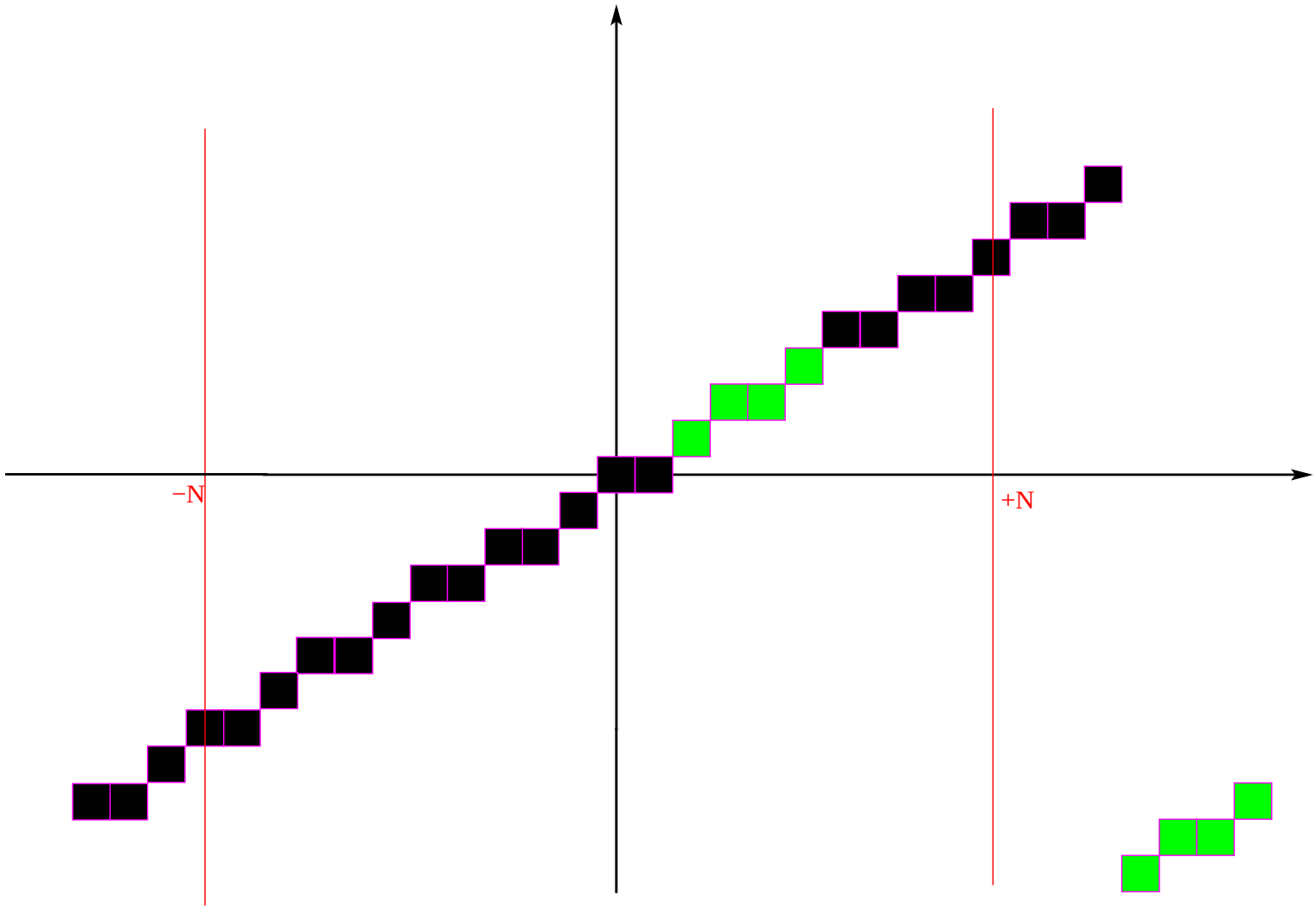
2



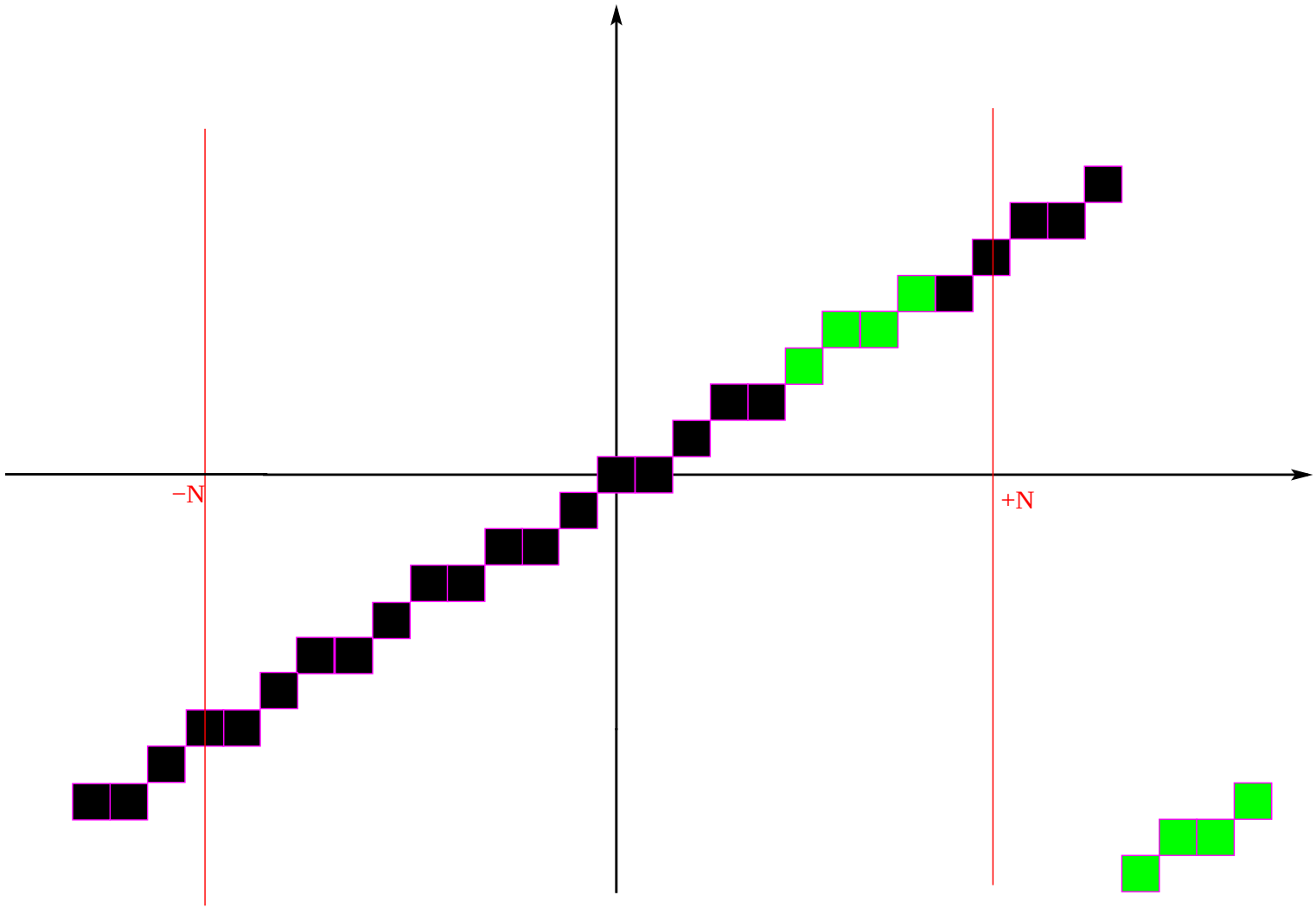
3



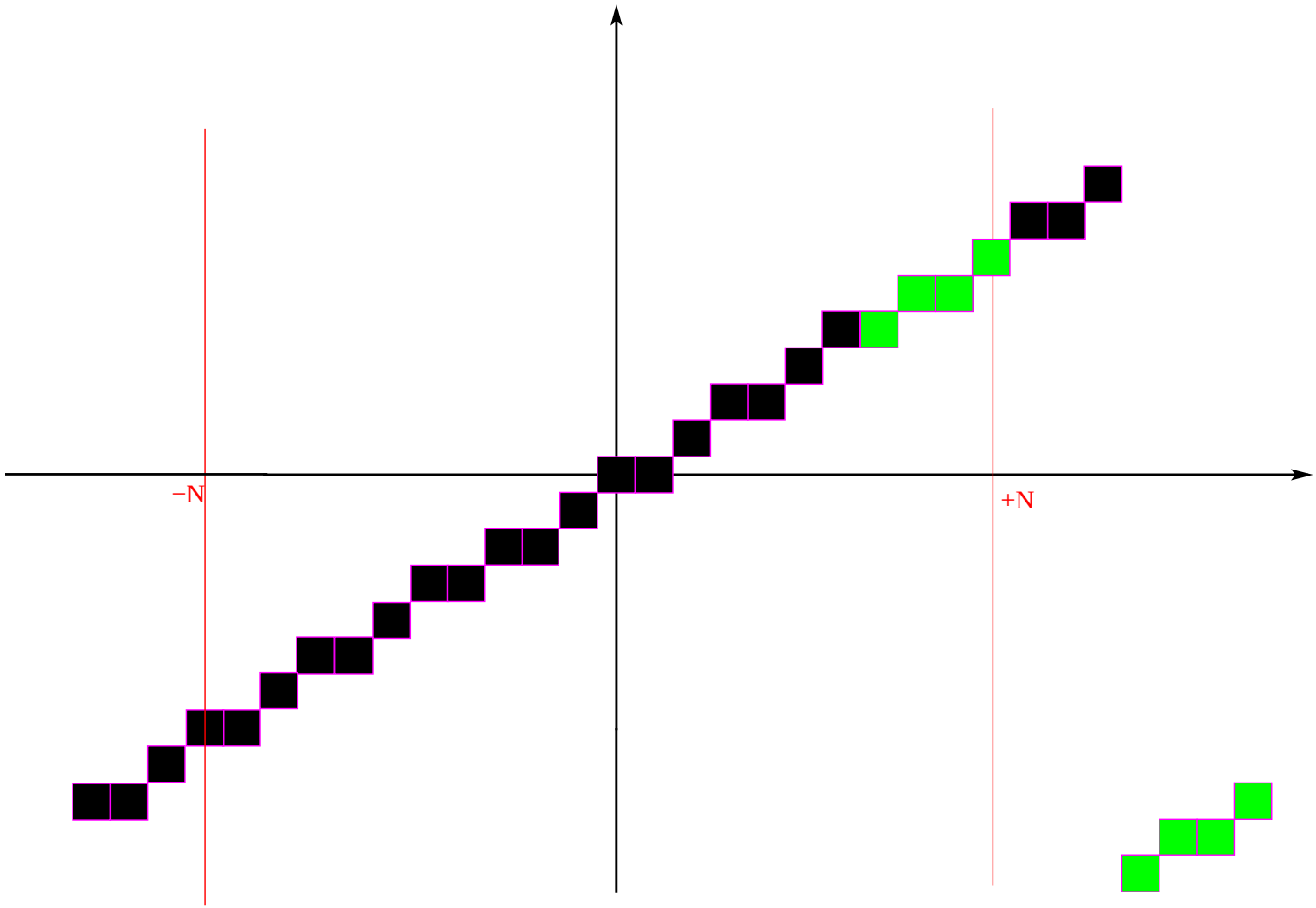
4



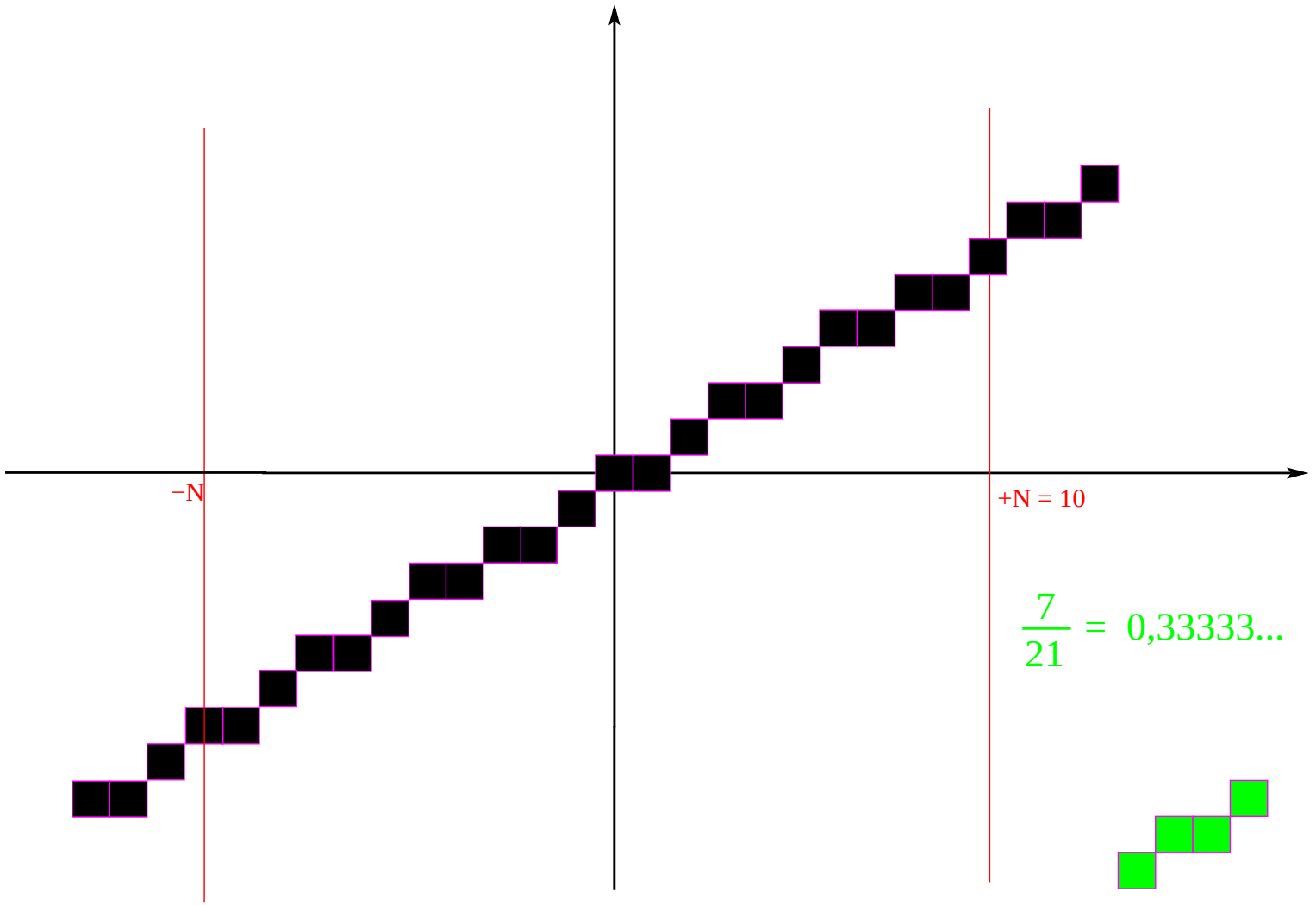
5



6



7


−N
+N = 10
7
21
= 0,33333...

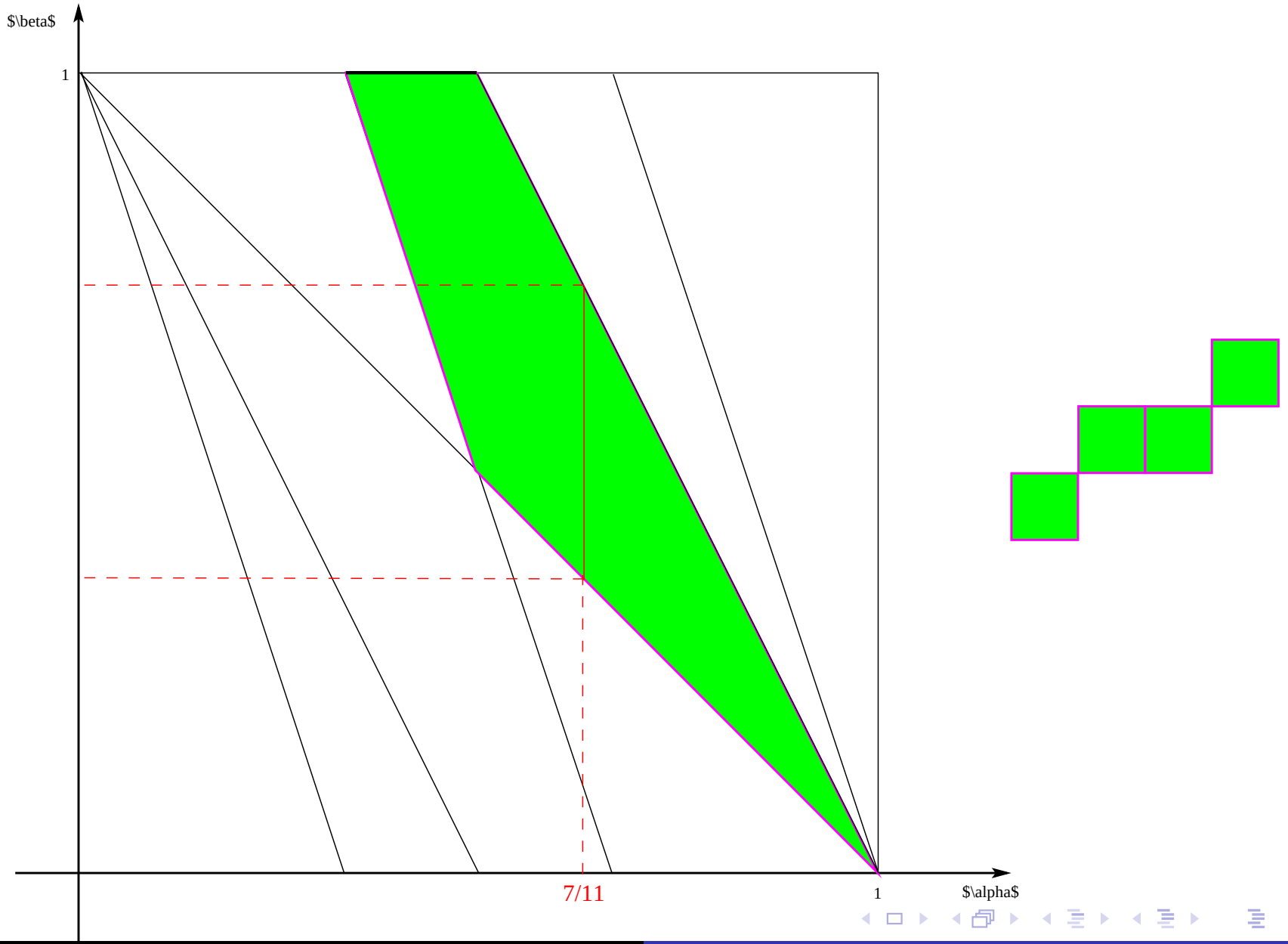
Propriétés :

Pour tout $\alpha \in [0,1]$ et $\beta \in \mathbb{R}$ on a:

1. $S \in \mathcal{C}(m,\alpha)$ si et seulement si $\mathrm{freq}_\alpha(S) > 0$.
2. $\mathrm{overfreq}_{\alpha,\beta}(S) = \mathrm{freq}_\alpha(S)$

Remarques :

- $I^\alpha(S) = \{\beta \in [0,1] \mid (\alpha,\beta) \in \mathcal{I}m(S)\} = \{\beta \in [0,1] \mid \langle 0\alpha+\beta\rangle \in [B_i^\alpha, B_{i+1}^\alpha)\} = [B_i^\alpha, B_{i+1}^\alpha)$ où $i \in [\![0, m-1]\!]$ et $[B_i^\alpha, B_{i+1}^\alpha)$ est l'intervalle correspondant au segment discret S.
- La fonction $\alpha \mapsto \mathrm{overfreq}_{\alpha,\beta}(S)$ ne dépend pas de $\beta \in [0,1]$.
- Si $\alpha = \frac{p}{q}$, alors $\mathrm{card}(\mathcal{C}(m,\alpha)) = q$ et pour tout $S \in \mathcal{C}(m,\alpha)$, $\mathrm{overfreq}_{\alpha,\beta}(S) = \frac{1}{q}$ qui indépendant de $S \in \mathcal{C}(m,\alpha)$.


β
1
7/11
1
α

Théorème :

Pour tout segment discret S, la fonction $\alpha \mapsto \mathrm{freq}_\alpha(S)$ est une fonction continue et est affine par morceaux.

Proposition :

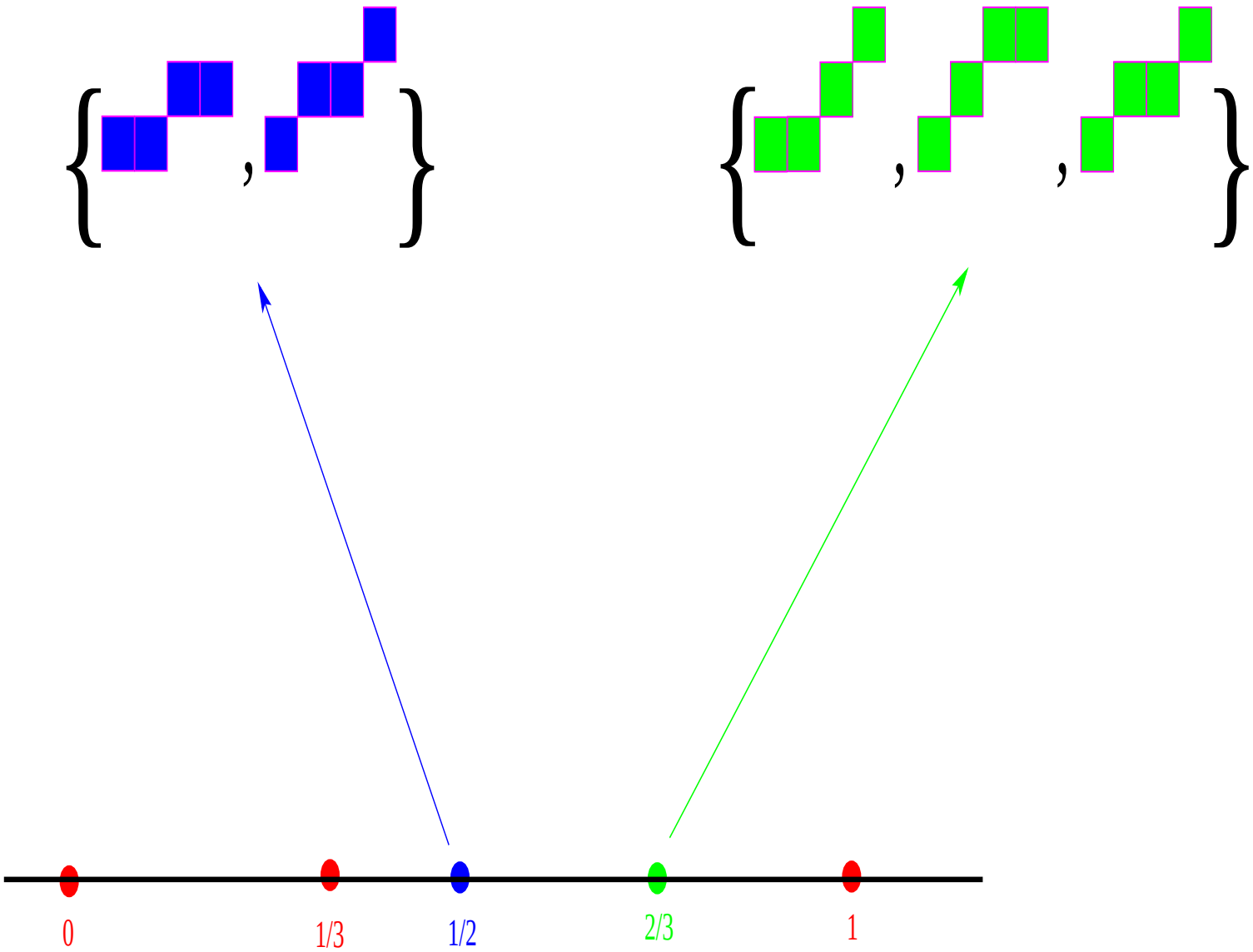
Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ tel que $\alpha_1 < \alpha_2$. Supposons que la fonction $\alpha \mapsto \mathrm{freq}_\alpha(S)$ est affine sur l'intervalle $[\alpha_1, \alpha_2]$ pour tout segment discret S. Soit $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$. Alors,

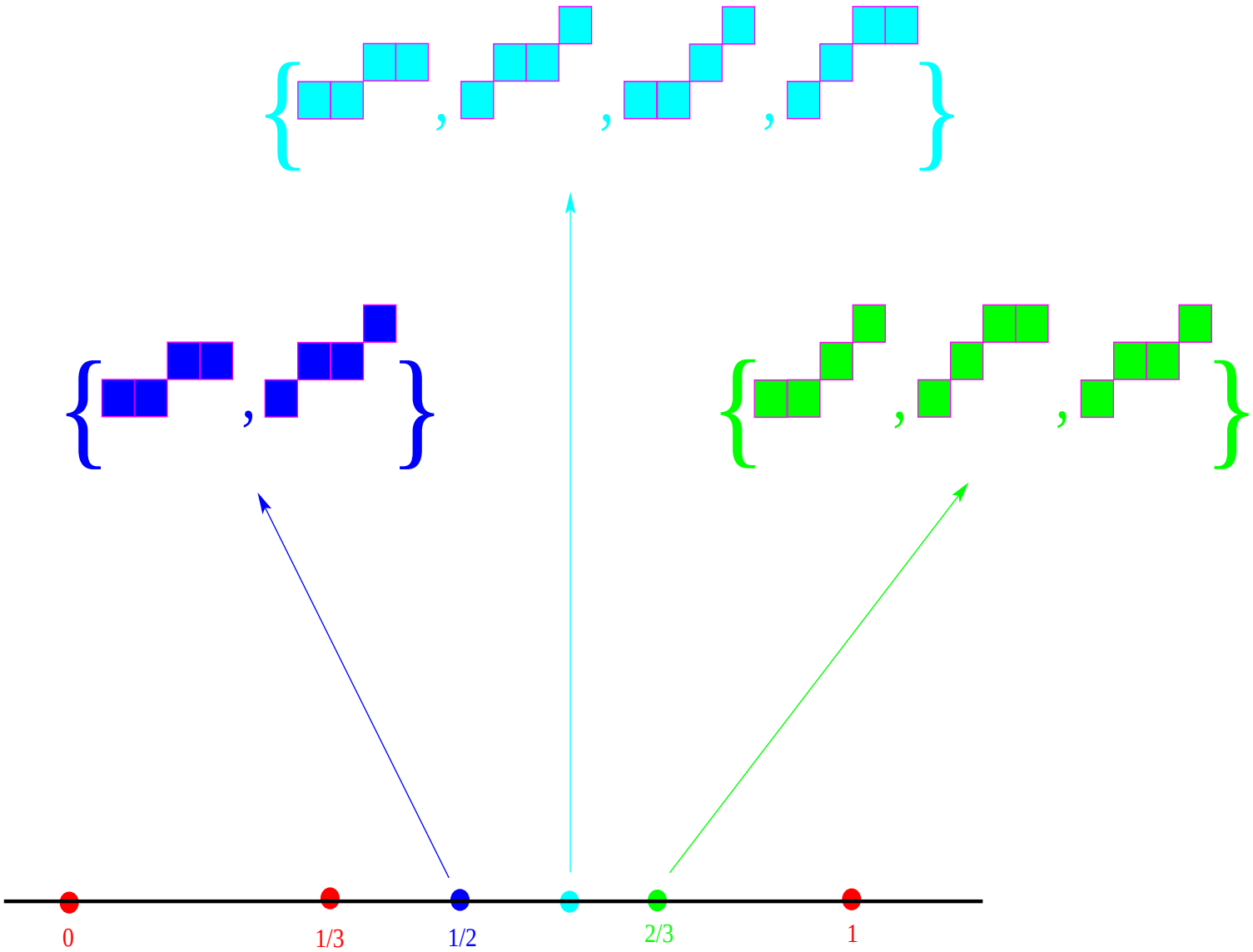
$$\mathcal{C}(m,\alpha) = \mathcal{C}(m,\alpha_1) \bigcup \mathcal{C}(m,\alpha_2)$$

Théorème :

Soient f, f' deux nombres de m-Farey consécutifs tels que $f < f'$. Alors, la fonction $\alpha \mapsto \mathrm{freq}_\alpha(S)$ est affine sur l'intervalle $[f, f']$ pour tout $S \in \mathfrak{S}_m$. De plus, pour tout $\alpha, \alpha' \in [0,1] \setminus \mathcal{F}_m$ $\mathcal{C}(m,\alpha) = \mathcal{C}(m,\alpha')$ si et seulement si il existe deux nombres m-Farey consécutifs f, f' tels que $\alpha, \alpha' \in (f, f')$.


0
1/3
1/2
2/3
1


0
1/3
1/2
2/3
1


0
1/3
1/2
2/3
1

Corollaire (Propriété des 3 intervalles) :

Soient $f = \frac{p}{q}, f' = \frac{p'}{q'}$ deux nombres de m-Farey consécutifs tels que $f < f'$. Alros, pour tout $\alpha \in (f, f'),\ \mathcal{C}(m, \alpha) = \mathcal{C}(m, f) \cup \mathcal{C}(m, f')$. De plus, pour $\alpha \in [f, f']$ on a :

- si $S \in \mathcal{C}(m, f) \setminus \mathcal{C}(m, f')$, alors $\alpha \mapsto \mathrm{freq}_\alpha(S) = p' - q'\alpha$,
- si $S \in \mathcal{C}(m, f') \setminus \mathcal{C}(m, f)$, alors $\alpha \mapsto \mathrm{freq}_\alpha(S) = q\alpha - p$,
- si $S \in \mathcal{C}(m, f) \cap \mathcal{C}(m, f')$, alors $\alpha \mapsto \mathrm{freq}_\alpha(S) = (p' - q'\alpha) + (q\alpha - p) = (q - q')\alpha + p' - p$.

Propriété :

Soient f, f', f'' trois nombres de m-Farey consécutifs et α, γ tels que $\alpha < f' = \frac{p}{q} < \gamma < f''$ où p, q nombres positifs premier entre eux. Alors,

1. $(\mathcal{C}(m,\gamma) \setminus \mathcal{C}(m,f')) \bigcap \mathcal{C}(m,\alpha) = \emptyset$.
2. si $f < \alpha < f'$, alors $\mathrm{card}(\mathcal{C}(m,\gamma) \setminus \mathcal{C}(m,\alpha)) = m - q + 1$.

Corollaire (Nombre de mots de Sturm de taille m) :

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Alors
$\mathrm{card}(\mathfrak{S}_m) = 1 + \sum_{i=1}^{m}(m-i+1)\varphi(i) \approx \frac{m^3}{\pi^2} + O(m^2 \ln(m))$ où φ est la fonction totient d'Euler *(i.e.*
$\varphi(n) = \mathrm{card}(\{i \mid 1 < i < n \text{ et } pgcd(i,n) = 1\})$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$*)*.