Rappels des notions de topologie

Point limite $\rightsquigarrow$ convergence, connexité, continuété, différentiabilité, etc.

Point limite $\leftrightsquigarrow$ Espace topologique.

Un ensemble $\mathcal{E}$ a une topologie pourvu que pour tout point p de $\mathcal{E}$ et tout sous-ensemble X de $\mathcal{E}$ la question :

"p est-il un point limite de X relativement à la topologie ?"

a une réponse.

- toujours oui $\leftrightsquigarrow$ topologie triviale
- toujours non $\leftrightsquigarrow$ topologie discrète

Définition :
Soit $\mathcal{E}$ un ensemble et $\tau \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{E})$ *(i.e. $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ est l'ensemble des sous-ensembles de $\mathcal{E}$)*.

L'ensemble τ est dit une topologie sur $\mathcal{E}$ si

- $\emptyset, \mathcal{E} \in \tau$;
- Une union quelconque d'éléments de τ est dans τ *(i.e si $(O_i)_{i\in I}$ est une collection d'éléments de τ alors $\bigcup_{i\in I} O_i$ est aussi un élément de τ)* ;
- Une intersection finie d'éléments de τ est dans τ *(i.e si $O_1, ..., O_n \in \tau$ alors $O_1 \bigcap ... \bigcap O_n$ est aussi un élément de τ)*.

τ est appelé une topologie sur $\mathcal{E}$, les éléments de τ sont appelés les ouverts de la topologie et le couple $(\mathcal{E}, \tau)$ est appelé un espace topologique.

Le complémentaire d'un ouvert est appelé un fermé :

$$F \text{ est fermé } \iff \mathcal{E} \setminus F \text{ est ouvert}$$

Définition :
Soit $(\mathcal{E}, \tau)$ un espace topologique et soient $p \in \mathcal{E}$ et $X \subseteq \mathcal{E}$. p est dit un point limite de X relativement à τ, si tout ouvert de τ contenant p contient nécéssairement un point x de X different de p.
On notera dans la suite $Limite_\tau(X)$ l'ensemble des points limites de X relativement à τ.

Exemple d'esapces topologiques :
Soit $\mathcal{E}$ un ensemble

1. $\tau_{tr} = \{\emptyset, \mathcal{E}\}$ est la topologie triviale sur $\mathcal{E}$.
2. $\tau_{dis} = \mathcal{P}(\mathcal{E})$ est la topologie discrète sur $\mathcal{E}$.
3. Soit $\mathcal{E} = \{a, b, c\}$. $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \mathcal{E}\}$ est une topologie sur $\mathcal{E}$.

Notations :
Soient $(\mathcal{E}, \tau)$ un espace topologique et $X \subseteq \mathcal{E}$,

- $\overline{X} = X \bigcup Limite_{\tau}(X)$. $\overline{X}$ est appelé la fermeture de X
- $X^{\circ} = \bigcup_{O \in \tau \text{ et } O \subseteq X} O$. X° est appelé ouverture de X et est le plus grand ouvert contenu dans X.
- $\partial(X) = \overline{X} \cap \overline{\mathcal{E} \setminus X}$. $\partial(X)$ est appelé le bord de l'ensemble X.

Exercices :

Montrez que si $(\mathcal{E}, \tau)$ un espace topologique et $X \subseteq \mathcal{E}$. Alors on a :

1. $\overline{X} = \bigcap_{(\mathcal{E} \setminus F) \in \tau \text{ et } X \subseteq F} F$. $\overline{X}$ est le plus petit ensemble fermé contenant X.
2. $\overline{X}$ est un ensemble fermé relativement à τ.
3. $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.
4. X est fermé $\iff \overline{X} = X$.

Opérations sur les topologies :
Définition :

- Soient $(\mathcal{E}, \tau)$ un espace topologique et X un sous-ensemble de $\mathcal{E}$. La topologie induite par τ sur X est la topologie $\tau_{|X} = \{O \cap X \mid O \in \tau\}$ ($\tau_{|X}$ *est appelé aussi la trace de la topologie* τ *sur* X *)*. Le couple $(X, \tau_{|X})$ est dit un sous-espace topologique de (X, τ).

- Soient $\mathcal{E}$ un ensemble et τ_1, τ_2 deux topolgies sur $\mathcal{E}$. τ_1 est dite plus fine que τ_2 lorsque $\tau_2 \subseteq \tau_1$.

Espaces métriques

Définition Soit $\mathcal{E}$ un ensemble. Une application $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \mapsto \mathbb{R}^+$ est dite une métrique (ou une distance) si pour tout $x, y, z \in \mathcal{E}$ on a :

- $d(x, y) = 0 \iff x = y.$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Le couple $(\mathcal{E}, d)$ est appelé un espace métrique.

Exemples $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) :
Soient $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ avec $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$.

- $d_\infty(\vec{x}, \vec{y}) = \sup\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$;
- $d_1(\vec{x}, \vec{y}) = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$
- $d_2(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum\limits_{1 \leq i \leq n} (x_i - y_i)^2}$
- Plus généralement, pour $p \geq 1$ on'a : $d_p(\vec{x}, \vec{y}) = (\sum\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Remarque : $d_\infty(\vec{x}, \vec{y}) = \lim\limits_{p \to \infty} d_p(\vec{x}, \vec{y})$

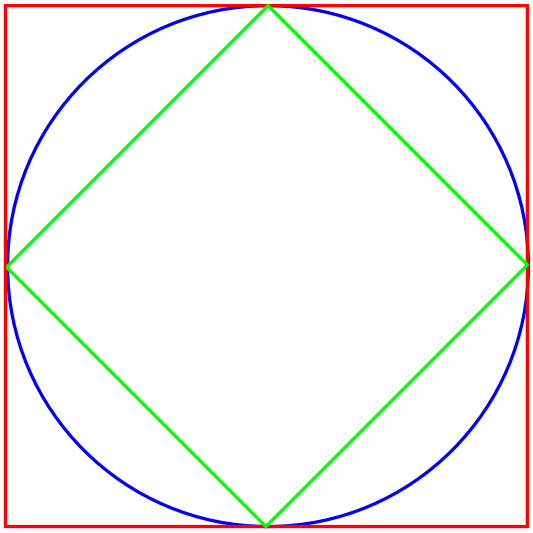
Notation :

Soient $(\mathcal{E}, d)$ un espace métrique, $x \in \mathcal{E}$ et $r > 0$. L'ensemble :

$$B_r^d(x) = \{y \in \mathcal{E} \mid d(x, y) < r\}$$

est appelé la boule ouverte de $\mathcal{E}$ de centre x et de rayon r relativement à la distance d.

$$B_r^d(x) \leftrightsquigarrow B_r(x)$$



Remarque :

La donnée d'un espace métrique induit une topologie. En effet, soit $(\mathcal{E}, d)$ un espace métrique. Alors

$$\tau^d = \{O \subseteq \mathcal{E} \mid \forall x \in O, \exists r > 0, B_r(x) \subseteq O\}$$

est une topologie sur $\mathcal{E}$, elle est appelée la topologie induite par la métrique d sur $\mathcal{E}$.

Remarque :

Sur $\mathbb{R}^n$, $\tau^{d_p} = \tau^{d_\infty}$ pour tout $p \geq 1$. Cette topologie est appelée la topologie usuelle (ou la topologie euclidienne) sur $\mathbb{R}^n$.

Application continue

Soient $(\mathcal{E}_1, \tau_1)$ et $(\mathcal{E}_2, \tau_2)$ deux espaces topolgiques.

- Une application $f : \mathcal{E}_1 \mapsto \mathcal{E}_2$ est dite continue si pour tout $O_2 \in \tau_2,\ f^{-1}(O_2) \in \tau_1$.

- Une application $f : \mathcal{E}_1 \mapsto \mathcal{E}_2$ est appelé un homéomorphisme si f est bijective et continue et f^{-1} est continue.
  Dans ce cas, on dit que les ensembles $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ sont homéomorphes.

Définition : Séparabilité ; connexité

Soit $(\mathcal{E}, \tau)$ un espace topologique et soit $X \subseteq \mathcal{E}$.

- $\mathcal{E}$ est dit séparable s'il existe deux ouverts non vides et disjoints dont l'union est $\mathcal{E}$.
- $\mathcal{E}$ est dit connexe, s'il n'est pas séparable.

– X est dit connexe relativement à τ si le sous-espace topologique $(X, \tau_{|X})$ est un espace topologique connexe.

– X est dit une composante connexe relativement à τ si X est connexe relativement à τ et pour tout X' tel que $X \subset X' \subseteq \mathcal{E}$, X' n'est pas connexe relativement à τ.

Définition : Connexité par arc

Soit $(\mathcal{E}, \tau)$ un espace topologique.

- Un arc dans $(\mathcal{E}, \tau)$ est l'image $f([0,1])$ d'une application continue f de $[0,1]$ dans $(\mathcal{E}, \tau)$ où $[0,1]$ est considéré avec la topologie usuelle induite par la distance d_2. $f(0)$ et $f(1)$ sont appelés les extrémités de l'arc.
- $(\mathcal{E}, \tau)$ est dit connexe par arc si pour tout points $p_1, p_2 \in \mathcal{E}$, il existe un arc dans $(\mathcal{E}, \tau)$ dont les extrémités sont les points p_1, p_2.

Définition :

Soient $(\mathcal{E}, \tau)$ un espace topologique et $f : [0,1] \mapsto \mathcal{E}$ une application continue où $[0,1]$ est consideré avec la topologie usuelle induite par la distance d_∞. $\mathcal{C}_f = f([0,1])$ est dit *une courbe fermée simple* dans $(\mathcal{E}, \tau)$ si $f(0) = f(1)$ et la restriction de f à l'intervalle semi-ouvert $[0,1[$ est une application injective.

Théorème de Jordan :

Considérons $\mathbb{R}^2$ avec la topologie usuelle et soit $\mathcal{C}$ une courbe fermée simple dans $\mathbb{R}^2$. Alors $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$ a deux composantes connexes dont une est bornée et l'autre non-bornée.

Définition :

Considérons $\mathbb{R}^2$ avec la topologie usuelle et soient $\mathcal{C}$ une courbe fermée simple dans $\mathbb{R}^2$ et $p \in (\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C})$. $Ind(p, \mathcal{C}) = Card(\{q \mid q \in (\mathcal{C} \cap R(p))$ et $R(p)$ non tangeant à $\mathcal{C}$ au point $q\}$) où $R(p)$ est une demi-droite partant du point q. $Ind(p, \mathcal{C})$ est appelé *l'indice* du point p relativement à la courbe fermée simple $\mathcal{C}$.

Propriété :

Soit $\mathcal{C}$ une courbe fermée simple dans $\mathbb{R}^2$ et $p \in (\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C})$. Alors,

- La paritée du nombre $Ind(p, \mathcal{C})$ ne dépond pas du choix de la demi-droite $R(p)$ partant de p.
- Si $Ind(p, \mathcal{C})$ est impair, alors p est dans la composante connexe bornée de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$.
- Si $Ind(p, \mathcal{C})$ est pair, alors p est dans la composante connexe non bornée de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$.

Graphe

Définitions et notations :

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble. Un graphe non-orienté simple sur $\mathcal{E}$ est un couple $G = (\mathcal{E}, A)$ où A est un ensemble de paires sur $\mathcal{E}$ c'est-à-dire des éléments de la forme $\{x, y\}$ avec $x, y \in \mathcal{E}$ et $x \neq y$ (i.e. $A \subseteq \mathcal{P}_2(\mathcal{E})$ où $\mathcal{P}_2(\mathcal{E})$ est l'ensemble des paires de l'ensemble $\mathcal{E}$). Les éléments de $\mathcal{E}$ (respectivement de A) sont appelés les sommets (respectivement les arêtes) du graphe G.

- $V_G(x) = \{y \mid \{x, y\} \in A\}$ et $V_G^*(x) = V_G(x) \bigcup \{x\}$.
- Un chemin C dans G est une suite $C = x_0, x_1, ..., x_n$ tel que $\{x_i, x_{i+1}\} \in A$ pour $0 \leq i < n$. x_0 (respectivement x_n) est appelé le début (respectivement la fin) du chemin C et n est appelé la longueur de C.
- G est dit connexe si $\forall x, y \in \mathcal{E}$, il existe un chemin de début x et de fin y.

Définitions et notations (suite) :

- Un chemin $x_0, ..., x_n$ est dit simple si $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$ sauf peut-être pour $\{i, j\} = \{0, n\}$.

- Un cycle est un chemin $x_0, ..., x_n$ tel que $x_0 = x_n$ et un cycle simple est un cycle qui est un chemin simple.

- Un arc simple est un chemin $x_0, ..., x_n$ tel que si $\{x_i, x_j\} \in A$ alors $i \equiv j + 1(\text{mod}n - 1)$ ou $j \equiv i + 1(\text{mod}n - 1)$.

- Une courbe fermée simple est un cycle qui est un arc simple. Une courbe fermée simple simple est appelée aussi une face.

- Un chemin géodesique entre deux points est un plus court chemin entre ces deux points.

Remarques :

- La donnée d'une fonction $V : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{P}(\mathcal{E})$ telle que pour tout $x, y \in \mathcal{E}$, $x \notin V(x)$ et $(y \in V(x) \iff x \in V(y))$ détermine d'une façon unique un graphe simple non-orienté G_V. La fonction V est appelée *le voisinage associée* au graphe G_V.

- Un chemin géodesique est un arc.

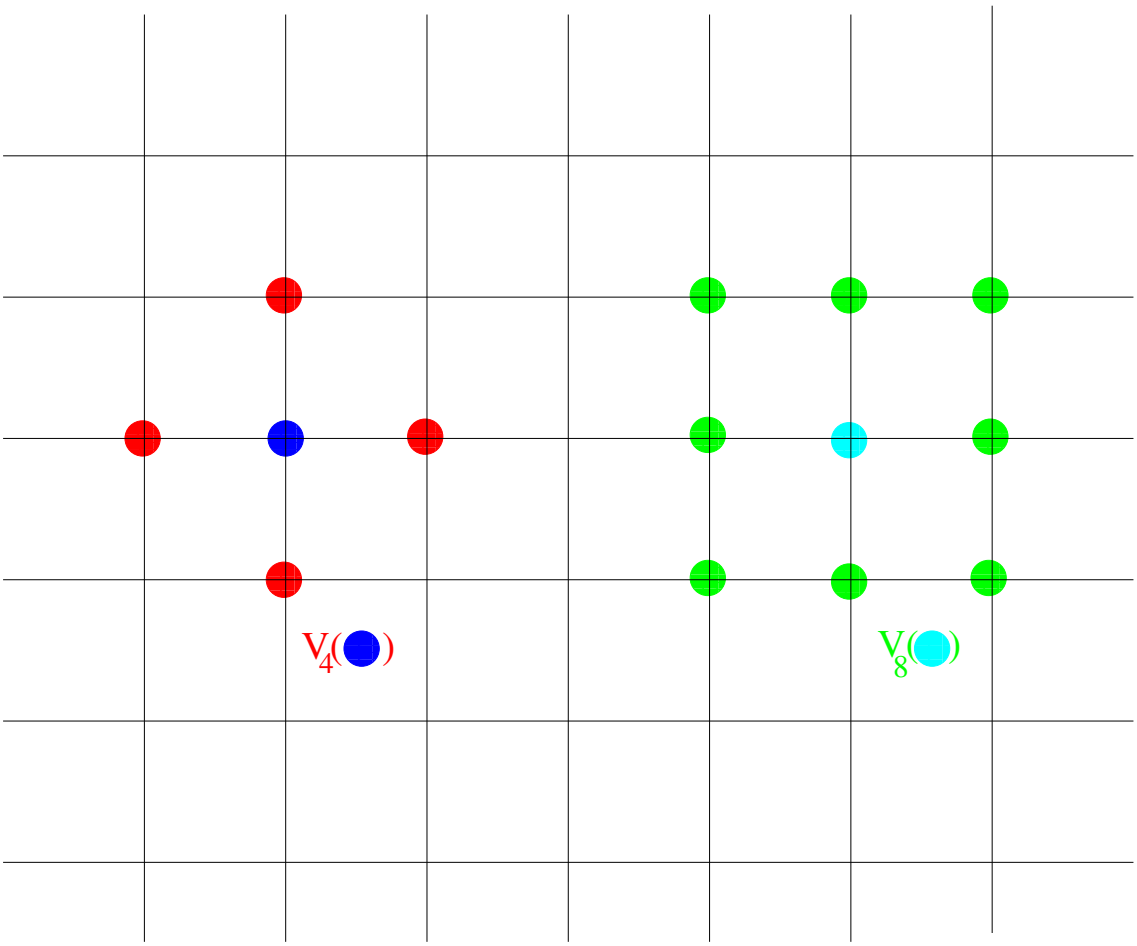
Exemples :

- $G_1 = (\mathbb{Z}, \{\{n, n+1\} \mid n \in \mathbb{Z}\})$.
- Sur $\mathbb{Z}^2$ on considère deux structures de graphes :

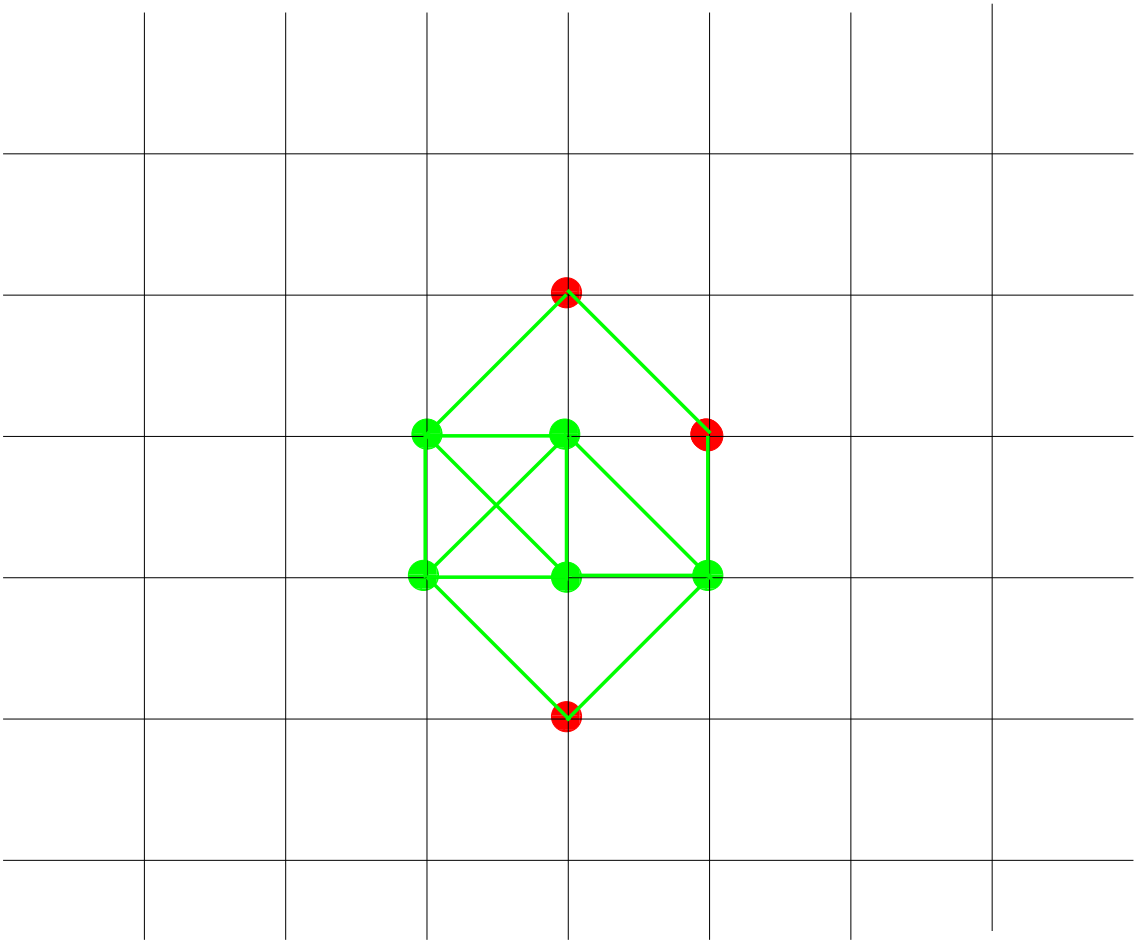
  1. $G_4 = (\mathbb{Z}^2, A_4)$ où A_4 correspond à la fonction voisinage V_4 définie par $V_4(p) = \{x \in \mathbb{Z}^2 \mid d_1(x, p) = 1\}$.

  2. $G_8 = (\mathbb{Z}^2, A_8)$ où A_8 correspond à la fonction voisinage V_8 définie par $V_8(p) = \{x \in \mathbb{Z}^2 \mid d_\infty(x, p) = 1\}$.

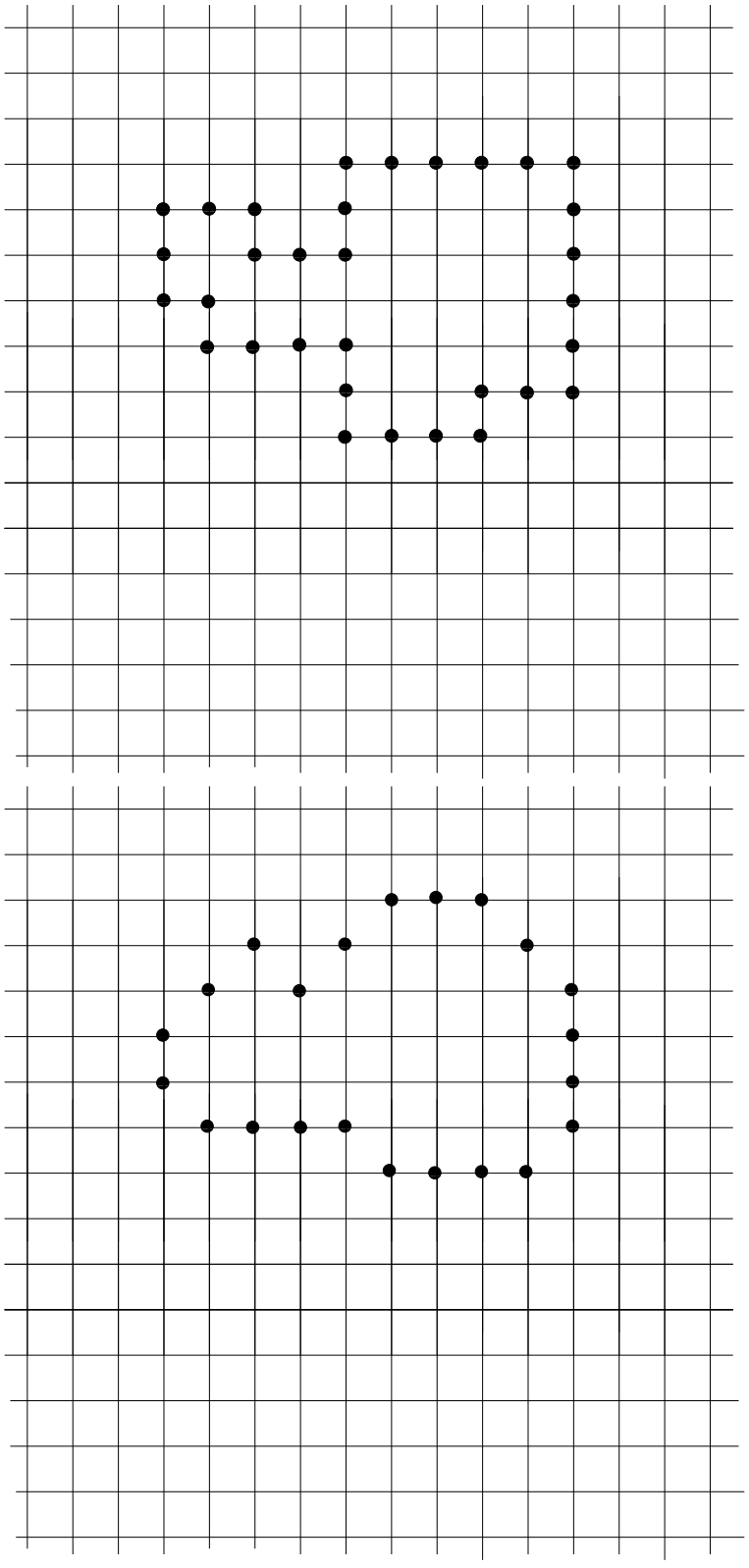
Les voisinages relativement à G_4 et G_8



Le Garphe G_8 est non planaire



Courbes fermées dans G_4 et G_8



Définitions :
Soient $G = (\mathcal{E}, A)$ un graphe non-orienté simple sur $\mathcal{E}'$ un sous-ensemble de $\mathcal{E}$.

- $G(\mathcal{E}') = (\mathcal{E}', A_{|_{\mathcal{E}'}})$ est appelé le sous-graphe de G engendré par $\mathcal{E}'$ où $A_{|_{\mathcal{E}'}} = A \bigcap \mathcal{P}_2(\mathcal{E}')$.
- $\mathcal{E}'$ est dit connexe relativement à G (ou connexe (s'il n y pas d'ambiguïté concernat le graphe G)) si le graphe $G(\mathcal{E}')$ est connexe.
- $\mathcal{E}'$ est appelé une composante connexe de G, si $\mathcal{E}'$ est un ensemble connexe maximal (pour l'inclusion) dans $\mathcal{E}$. Autrement dit, si $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}'' \subseteq \mathcal{E}$, alors $\mathcal{E}''$ n'est pas connexe.

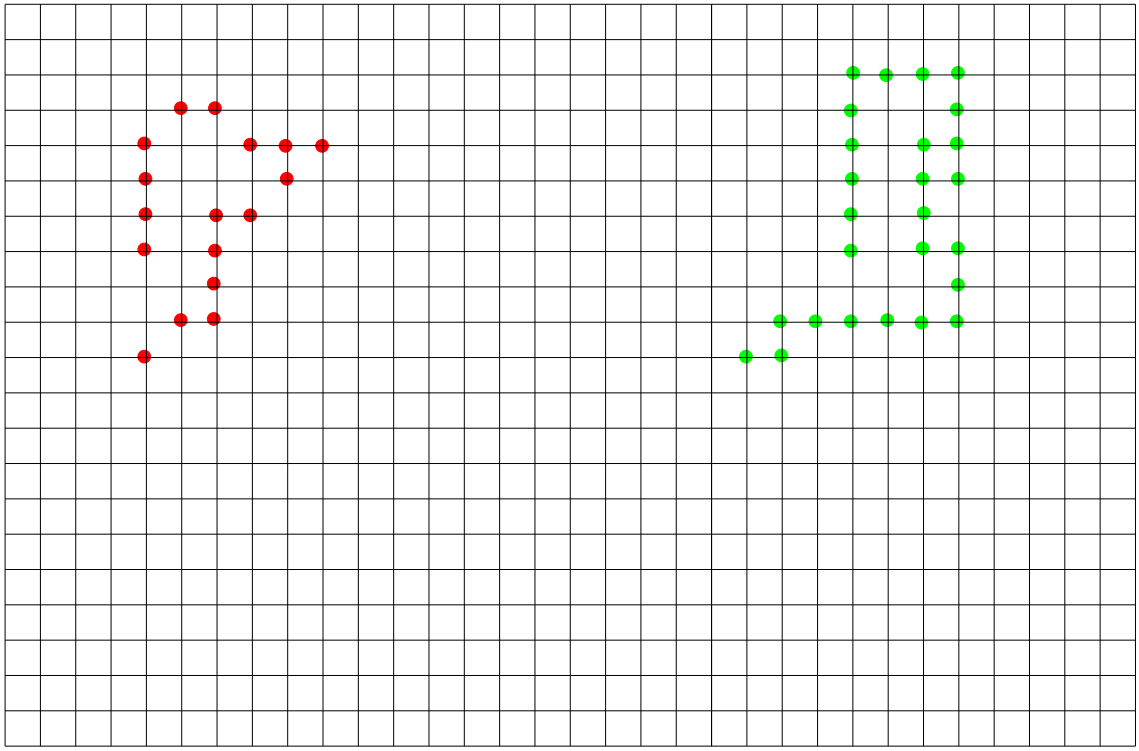
Remarques :

- Soit $G = (\mathcal{E}, A)$ un graphe simple non-orienté et soit C un sous-ensemble connexe de $\mathcal{E}$ alors il existe une et une seule composante connexe de G contenant C.
- L'ensemble $\mathcal{C}(G)$ des compsantes connexes d'un graphe $G = (\mathcal{E}, A)$ est une partition de $\mathcal{E}$ autrement dit $\mathcal{E} = \bigcup_{C \in \mathcal{C}(G)} C$ et si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(G)$ et $C_1 \neq C_2$ alors $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.

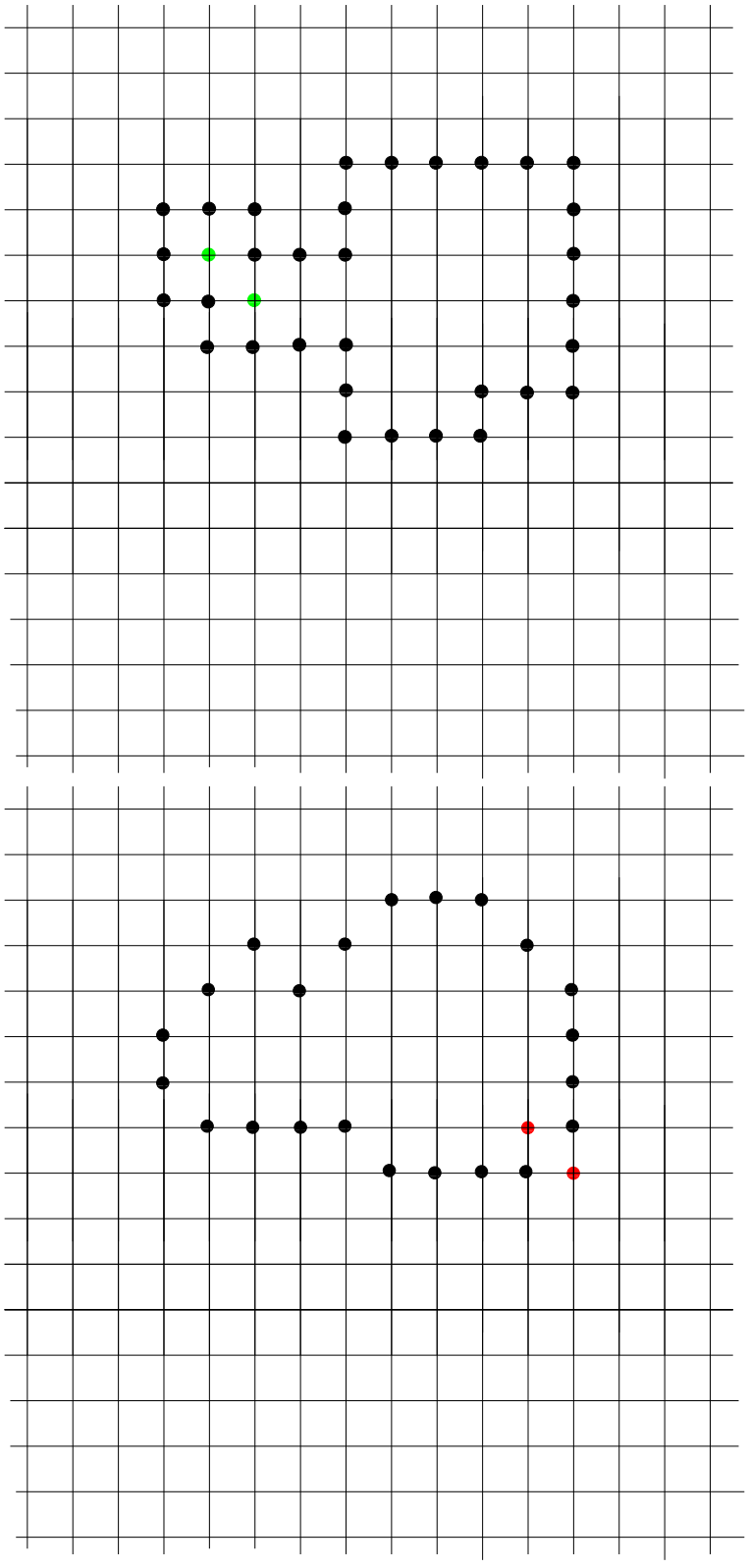
Définition :

- Un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^n$ pour $n = 1$ ou 2 est dit $k-$connexe s'il est connexe relativement au graphe G_k pour $k = 1, 4$ ou 8 et une k-composante connexe est une composante connexe relativement au graphe G_k.
- Un k-arc simple (respectivement une k-courbe fermée simple) est un arc (respectivement une courbe fermée simple) relativement au graphe G_k.

4-Connexité et 8-connexité



Courbes fermées dans G_4 et G_8



Propriétés (Rosenfeld - 1970) :

Soit $\mathcal{C}$ une 4-courbe fermée simple de longueur strictement supérieure à 4.

- L'intérieur et l'extérieur de $\mathcal{C}$ sont tous les deux non vides.
- Si p est un pixel intérieur relativement à $\mathcal{C}$ et q est un pixel extérieur relativement à $\mathcal{C}$, alors tout 8-chemin allant de p à q rencontrent nécessairement $\mathcal{C}$.

Théorème de Jordan discret (Rosenfeld - 1973) :

Soit $\mathcal{C}$ une 4-courbe *(respectivement 8-courbe)* fermée simple de longueur strictement supérieure à 4 *(respectivement strictement supérieure à 3)*. Alors, $\mathbb{Z}^2 \setminus \mathcal{C}$ a deux composante 8-connexes *(respectivement deux composante 4-connexes)* dont une est finie et l'autre est infinie.

Définition :
Soit $\mathcal{E}$ un ensemble et $\tau \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{E})$ L'ensemble τ est dit une topologie d'Alexandroff sur $\mathcal{E}$ si

- $\emptyset, \mathcal{E} \in \tau$;
- Une union quelconque d'éléments de τ est dans τ *(i.e si $(O_i)_{i\in I}$ est une collection d'éléments de τ alors $\bigcup_{i\in I} O_i$ est aussi un élément de τ)* ;
- Une intersection quelconque d'éléments de τ est dans τ *(i.e si $(O_i)_{i\in I}$ est une collection d'éléments de τ alors $\bigcap_{i\in I} O_i$ est aussi un élément de τ)*.

Soit $p \in \mathcal{E}$.

$$O_\tau(p) = \bigcap_{O\in\tau \text{ et } p\in O} O.$$

$O_\tau(p)$ est le plus petit ouvert (au sens de l'inclusion) de τ contenant p.

Préservation de "la topologie" dans $\mathbb{Z}$

En cherche les topologies τ sur $\mathbb{Z}$ telles que la condition suivante soit vérifiée :

- (i_1) Tout sous-ensemble A de $\mathbb{Z}$ est connexe relativement à τ si et seulement si A est 1-connexe.

$\rightarrow$ "Deux" possibilités : les topologies **homéomorphes** τ et τ' telles que :

- $O_\tau(0) = \{-1, 0, 1\}$, $O_\tau(1) = \{1\}$ et pour tout $p \in \mathbb{Z}$,
$$O_\tau(p+2) = \{p\} \oplus O_\tau(p) \text{ et } O_\tau(p-2) = \{p\} \oplus O_\tau(p).$$

- $O_{\tau'}(0) = \{0\}$, $O_{\tau'}(1) = \{0, 1, 2\}$ et pour tout $p \in \mathbb{Z}$,
$$O_{\tau'}(p+2) = \{2\} \oplus O_{\tau'}(p) \text{ et } O_{\tau'}(p-2) = \{-2\} \oplus O_{\tau'}(p).$$



Préservation de "la topologie" dans $\mathbb{Z}^2$

En cherche les topologies τ sur $\mathbb{Z}$ telles que la condition suivante soit vérifiée :

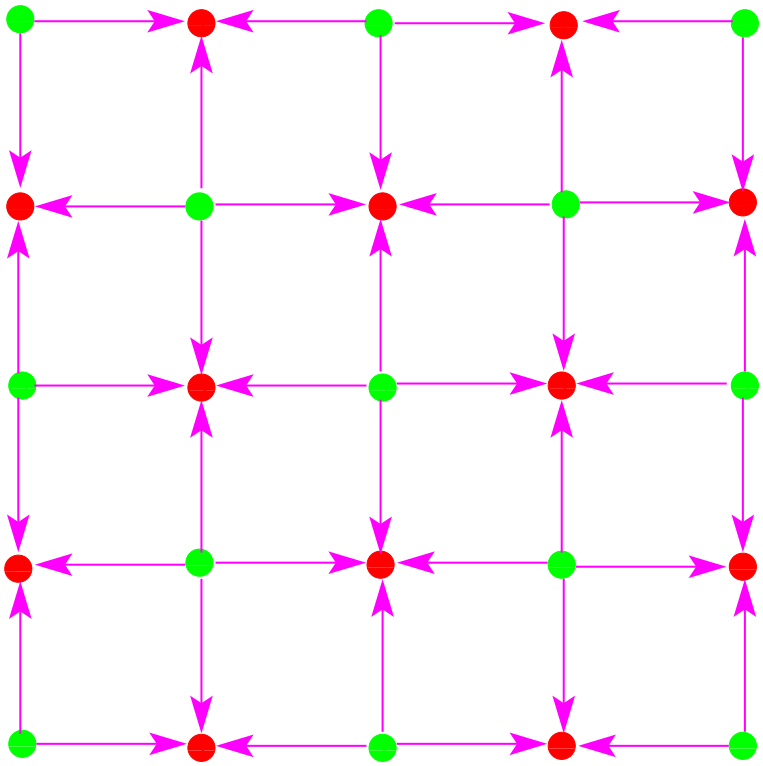
(i_4) Tout sous-ensemble 4-connexe de $\mathbb{Z}^2$ est connexe relativement à τ.

(i_8) Tout sous-ensemble non 8-connexe de $\mathbb{Z}^2$ est non connexe relativement à τ.

$\rightarrow$ **À homéomorphisme près, il n y a que deux topologies possibles τ et τ' vérifiant les conditions (i_4) et (i_8)**

La topologie d'Alexandroff τ' est définie par le plus petit ouvert associés à chaque point :

- $O_\tau(0) = V_4(0,0) \cup \{(0,0)\}$,
- $O_\tau(p) = \{p\}$ pour $p \in V_4(0,0)$ et
- $O_\tau(p + (\pm 1, \pm 1)) = O_\tau(p) \oplus \{(\pm 1, \pm 1)\}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}^2$



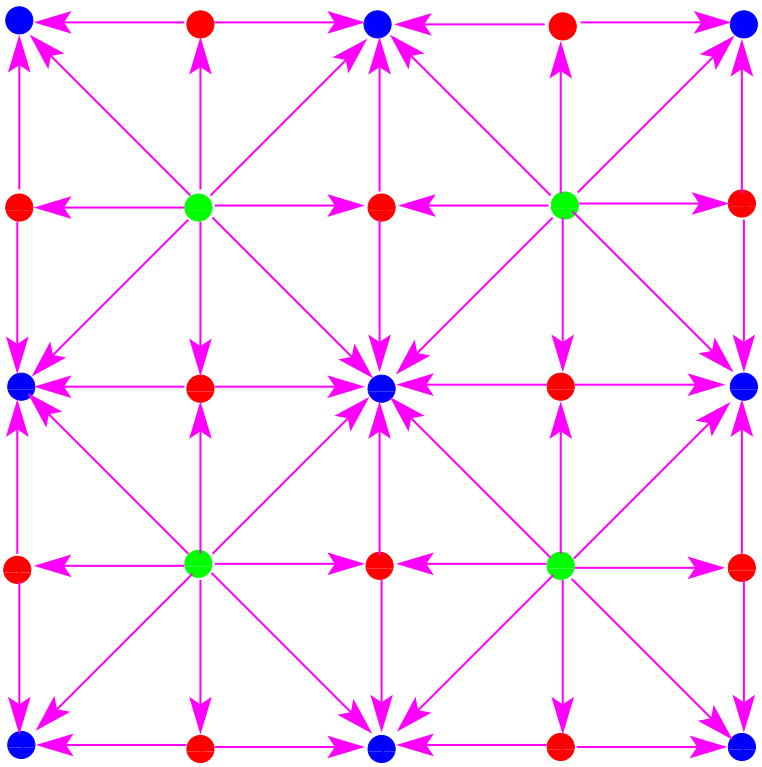
Notations :

$V_{4X}(x,y) = \{(x-1,y),(x+1,y)\}$; $V_{4Y}(x,y) = \{(x,y-1),(x,y+1)\}$.

$$\rightsquigarrow \; V_4(x,y) = V_{4X}(x,y) \cup V_{4Y}(x,y).$$

La topologie d'Alexandroff τ' est définie par le plus petit ouvert associés à chaque point :

- $O_{\tau'}(0) = V_8(0,0) \cup \{(0,0)\}$,
- $O_{\tau'}(p) = \{p\}$ pour $p \in (V_8(0,0) \setminus V_4(0,0))$,
- $O_{\tau'}(p) = V_{4Y}(p) \cup \{p\}$ pour $p \in V_{4X}(0,0)$,
- $O_{\tau'}(p) = V_{4X}(p) \cup \{p\}$ pour $p \in V_{4Y}(0,0)$, et
- $O_{\tau'}(p + (0,\pm 2)) = O_{\tau'}(p) \oplus \{(0,\pm 2)\}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}^2$ et
- $O_{\tau'}(p + (\pm 2,0)) = O_{\tau'}(p) \oplus \{(\pm 2,0)\}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}^2$.



Arbre des composantes k-connexes

$\rightarrow$ k-connexité pour la figure et k'-connexité pour le fond avec

$$k \in \{4, 8\} \text{ et } k' = 12 - k \text{ donc } \{k, k'\} = \{4, 8\}$$

Définition :

Soient A une composante k-connexe de la figure et B une composante k'-connexe du fond d'une image binaire I. A et B sont dites adjacentes s'il existe un pixel $a \in A$ et un pixel $b \in B$ tels que $b \in V_8(a)$. On utilisera la notation : $\mathcal{A}_{I,k,k'}(A, B)$.

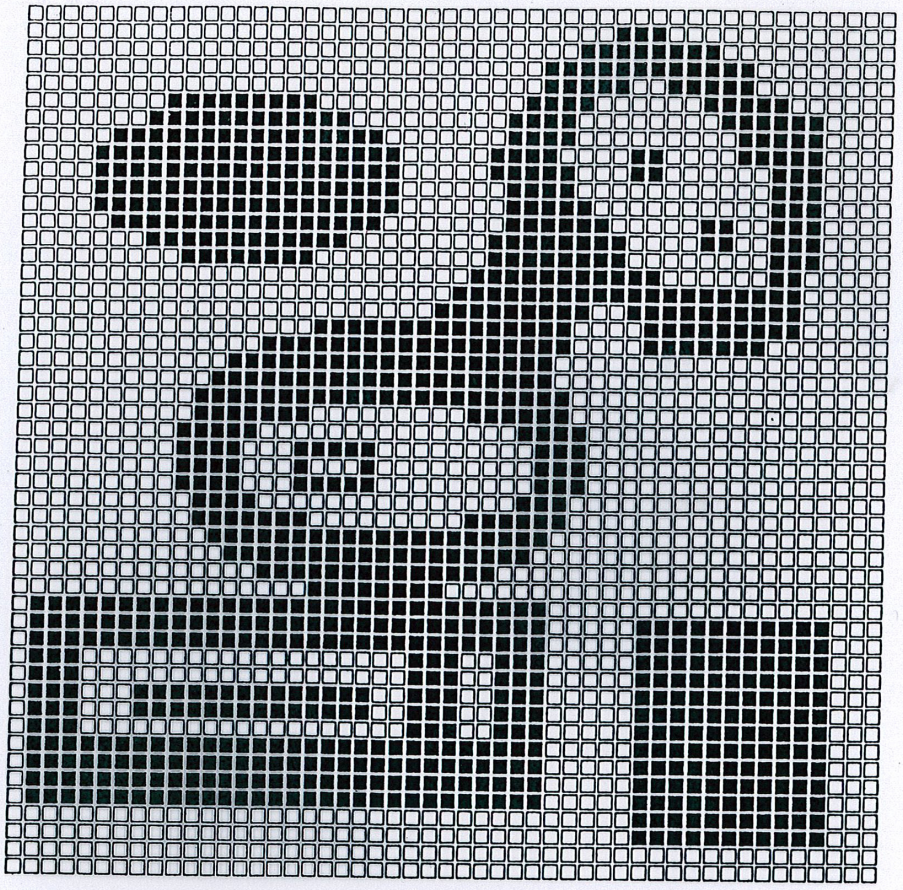
Remarque :

Dans une image binaire I, la relation d'adjacence $\mathcal{A}_{I,k,k'}$ définie un graphe non-orienté bipartie entre les composantes k-connexes de la figure et les composantes k'-connexes du fond de l'image I.

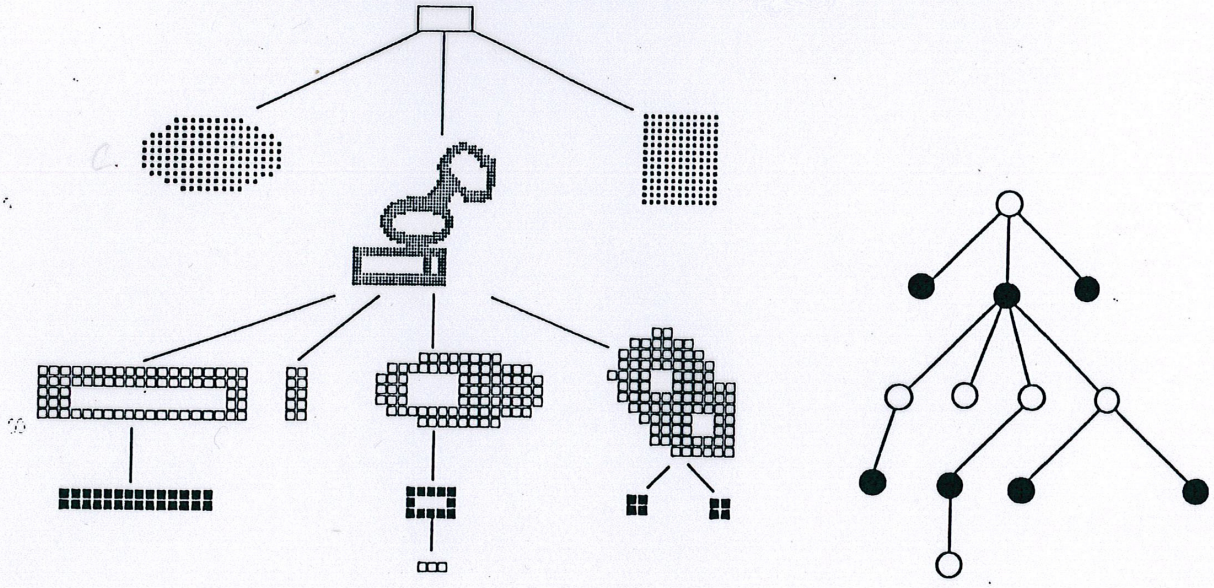
Propriétés :

- Soient A une composante k-connexe de la figure et B une composante k'-connexe du fond d'une image I. Alors A et B sont adjacentes si et seulement si il existe un pixel $a \in A$ et un pixel $b \in B$ tels que $b \in V_4(a)$.

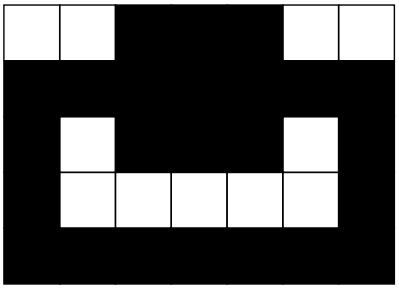
- Dans une image binaire I, le graphe bipartie correspondant à la relation d'adjacence $\mathcal{A}_{I,k,k'}$ entre les composantes k-connexe de la figure et les composantes k'-connexe du fond est un arbre.

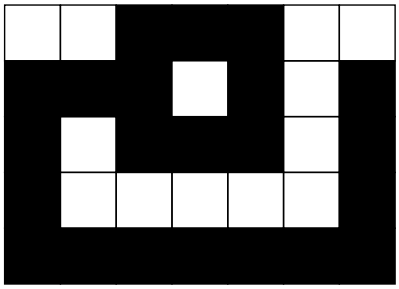


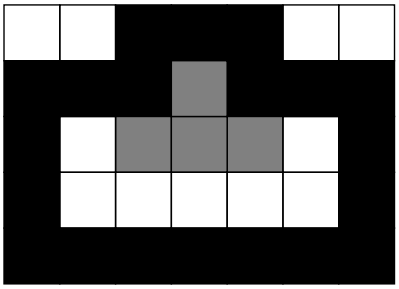
(a) Une image de $\mathbb{Z}^2$.

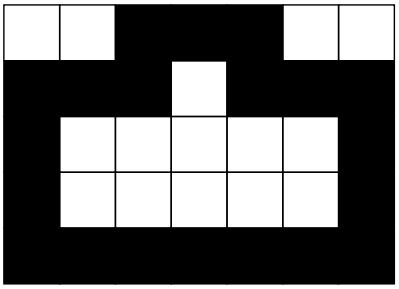


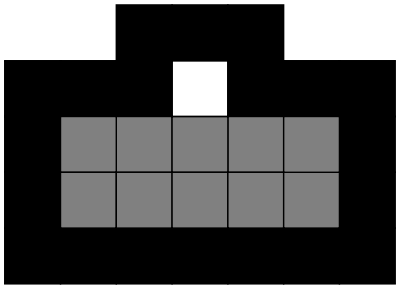
Déformation “continue” dans l’espace discret !



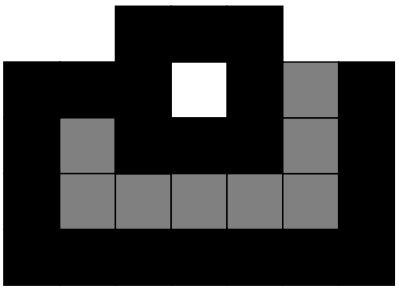






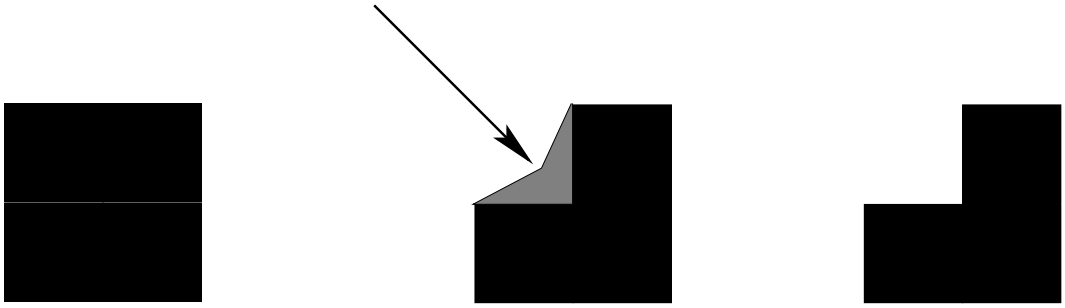




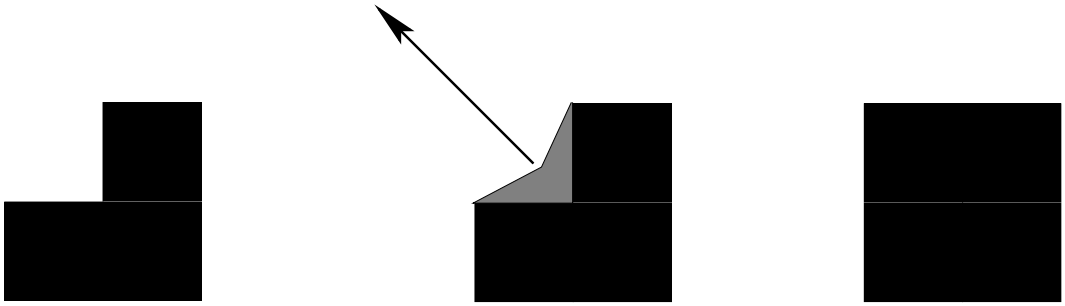




Suppression “continue” d’un pixel !



Adjonction “continue” d’un pixel !



Préservation de la topologie dans $\mathbb{Z}^2$

Soient I une image binaire dans $\mathbb{Z}^2$ et $X \subseteq \mathbb{Z}^2$ la figure de I (X *(respectivement* $\mathbb{Z}^2 \setminus X$ *est l'ensemble des pixels noirs (respectivement blancs))* de I.
Soient $k \in \{4, 8\}$ et $k' = 12 - k$ donc $\{k, k'\} = \{4, 8\}$.

Définition :

Un pixel $x \in X$ est dit k-simple relativement à X si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

(I) X et $X \setminus \{x\}$ ont le même nombre de composantes k-connexes.

(II) $\mathbb{Z}^2 \setminus X$ et $(\mathbb{Z}^2 \setminus X) \cup \{x\}$ ont le même nombre de composantes k'-connexes.

$\rightsquigarrow$ **Caratérisation globale de la notion de k-simplicité.**

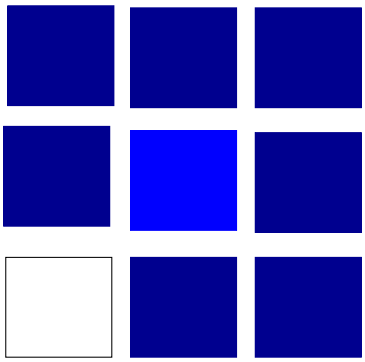
$\rightsquigarrow$ **Caratérisation locale de la notion de k-simplicité ?**

Théorème (Rosenfeld 1970) :

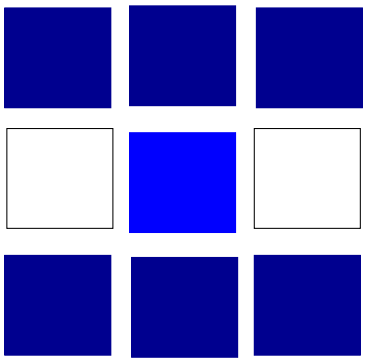
Un pixel $x \in X$ est k-simple relativement à X si et seulement si

(i) $V_8(x) \cap X$ est non vide et contient une seule composante k-connexe qui est k-adjacente à x.

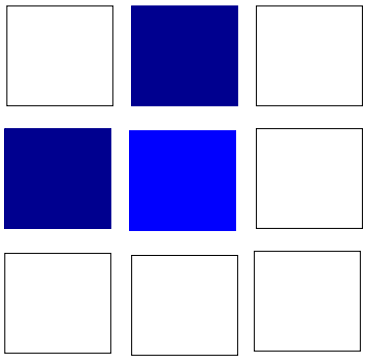
(ii) $V_8(x) \cap (\mathbb{Z}^2 \setminus X)$ est non vide et contient une seule composante k'-connexe qui est k'-adjacente à x.



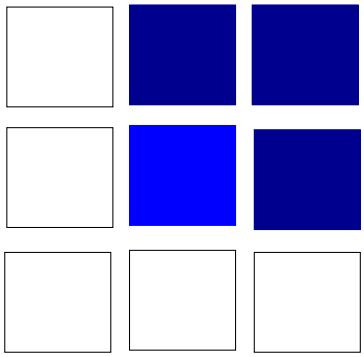
(1) 4−simple
non 8−simple



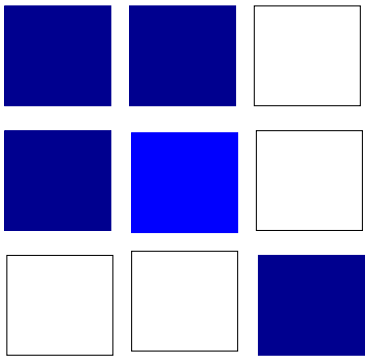
(2) non 4−simple
non 8−simple



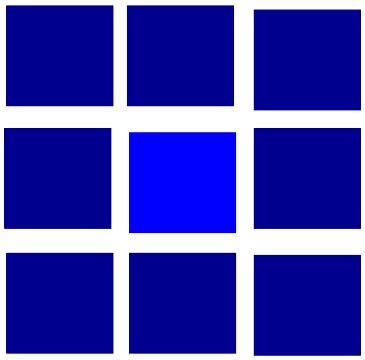
(3) non 4−simple
8−simple



(4) 4−simple
8−simple



(5) 4−simple
non 8−simple



(6) non 4−simple
non 8−simple

Soit $k \in \{4, 8\}$.

Définition :

Soient $X, Y \subseteq \mathbb{Z}^2$ tels que $Y \subseteq X$. Y est dit sous k-homotope à X s'il exists une suite d'ensembles $Z_0, Z_1, ..., Z_n$ telle que

- $Z_0 = X, \quad Z_n = Y$ et
- $Z_i \setminus Z_{i+1} = \{x_i\}$ et x_i est k-simple relativement à Z_i pour tout entier i tel que $0 \leq i < n$.

Théorème :

Soient $X, Y \subseteq \mathbb{Z}^2$ tels que $Y \subseteq X$. Y est sous k-homotope à X si et seulement si

1. Chaque composante k-connexe de X contient exactement une unique composante k-connexe de Y et
2. chaque composante $(12 - k)$-connexe de $\mathbb{Z}^2 \setminus Y$ contient exactement une unique composante $(12 - k)$-connexe de $\mathbb{Z}^2 \setminus X$.

Soit $k \in \{4, 8\}$.

Définition :

Soient $X, Y \subseteq \mathbb{Z}^2$. X et Y sont dit k-homotopiquement equivalent s'il exists une suite d'ensembles $Z_0, Z_1, ..., Z_n$ telle que

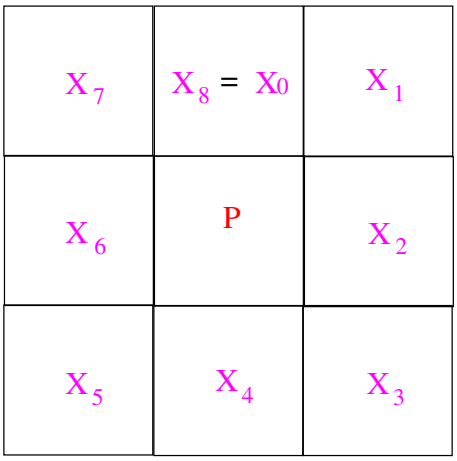
- $Z_0 = X$, $Z_n = Y$ et
- ($Z_i \setminus Z_{i+1} = \{x_i\}$ et x_i est k-simple relativement à Z_i) ou ($Z_{i+1} \setminus Z_i = \{x_i\}$ et x_i est k-simple relativement à Z_{i+1}) pour tout entier i tel que $0 \leq i < n$.

Théorème :

Soient $X, Y \subseteq \mathbb{Z}^2$. X et Y sont k-homotopiquement equivalent si et seulement si leurs arbes de composantes k-connexes sont isomorphes (c'est-à-dire que les deux arbres sont égaux à un renommage près des noeuds).

Pixel simple et nombres de Yokoï

$\rightsquigarrow$ (pixel noir $\leftrightarrow$ 1) ; (pixel blanc $\leftrightarrow$ 0)



Voisinage dans l'image I du pixel P où les varibales X_i prennent les valeurs 0 ou 1 selon qu'ils sont pixel blanc ou pixel noir.

Définition (Nombres de Yokoï) :

- $Y_{4,I}(P) = X_0(1 - X_1X_2) + X_2(1 - X_3X_4) + X_4(1 - X_5X_6) + X_6(1 - X_7X_8)$.
- $Y_{8,I}(P) = X'_0(1 - X'_1X'_2) + X'_2(1 - X'_3X'_4) + X'_4(1 - X'_5X'_6) + X'_6(1 - X'_7X'_8)$.

où $X'_i = 1 - X_i$ pour tout entier $0 \leq i \leq 7$.

Théorème :

P est k-simple relativement à l'image binaire I si et seulement si $Y_{k,I}(P) = 1$.

